Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE FAMILLE DE COURBES ET LA REPRÉSENTATION GÉOGRAPHIQUE DES SURFACES

Autor: Vincensini, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28592

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 10.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SUR UNE FAMILLE DE COURBES ET LA REPRÉSENTATION GÉOGRAPHIQUE DES SURFACES

PAR

P. VINCENSINI (Marseille).

J'ai déterminé [1] toutes les courbes de l'espace auxquelles on peut imprimer un mouvement tel qu'au cours de ce mouvement, les aires engendrées par les différents arcs d'une même courbe soient proportionnelles aux arcs.

Les seuls mouvements possibles sont les mouvements hélicoïdaux (ou révolutifs), et les courbes en question sont les trajectoires orthogonales des géodésiques d'une surface hélicoïde quelconque déduites, par déplacement hélicoïdal, de l'une quelconque d'entre elles.

Me bornant ici au cas révolutif, j'effectue la détermination directe des courbes (Γ) qui, par rotation autour d'un axe, engendrent des aires proportionnelles aux arcs, en vue surtout de l'utilisation de ces courbes pour la détermination des géodésiques de certaines surfaces de révolution, et leur intervention dans le problème de la représentation géographique (avec conservation des aires) des surfaces de révolution.

L'étude de ce dernier problème conduit naturellement à celui, plus général, de la représentation géographique d'une surface quelconque sur un plan, de façon qu'une famille de courbes parallèles de la surface soit représentée par une famille de droites parallèles du plan.

---

[1] Voir, par exemple, *Bulletin de la Soc. math. de France:* Sur certains mouvements de figures invariables, LXI, 1934.

I. *Les courbes* (Γ). — Soit Oz l'axe de rotation; (Γ) étant une courbe dont les arcs engendrent, par rotation, autour de Oz, des aires qui leur sont proportionnelles, désignons par M un point quelconque de (Γ) et par ds un élément d'arc contenant ce point.

Supposons la courbe rapportée à un système de trois axes de coordonnées rectangulaires Oxyz. L'aire engendrée par ds en tournant autour de Oz est la même que celle engendrée par sa projection sur le plan zOM; elle a pour expression

$$2\pi\rho \sin\varphi ds ,$$

φ étant l'angle que fait la tangente en M à (Γ) avec la normale au plan zOM et ρ la distance du point M à Oz.

Les courbes (Γ) sont donc caractérisées par la relation

$$2\pi\rho \sin\varphi ds = a ds , \quad (a = \text{const.}) ,$$

ou

$$\rho \sin\varphi = K , \tag{1}$$

en posant $K = \frac{a}{2\pi}$; nous dirons dans ce qui suit que K est le *paramètre* de la courbe (Γ) envisagée. La relation (1) donne tout de suite les courbes (Γ) tracées sur des cylindres de révolution d'axe Oz; dans ce cas, en effet, ρ est constant, φ l'est par suite aussi, et les courbes sont des hélices circulaires.

Transformons (1) en introduisant les coordonnées x, y, z d'un point quelconque M de (Γ). Soient α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente en M à (Γ); les paramètres directeurs de la normale en M au plan zOM sont

$$-y , \quad x , \quad 0 .$$

On a

$$\cos\varphi = \frac{\beta x - \alpha y}{\sqrt{x^2 + y^2}} , \quad \sin^2\varphi = \frac{x^2 + y^2 - (\beta x - \alpha y)^2}{x^2 + y^2} = \frac{\rho^2 - (\beta x - \alpha y)^2}{\rho^2}$$

En élevant au carré les deux membres de la relation (1) et en remplaçant $\sin^2\varphi$ par la valeur précédente on obtient

$$\rho^2 - (\beta x - \alpha y)^2 = K^2 ,$$

ou successivement

$$(\rho^2 - K^2)\, ds^2 = (x\,dy - y\,dx)^2 ,$$
$$(\rho^2 - K^2)\, ds^2 = \rho^4 d\theta^2 ,$$

θ, ρ, z étant les coordonnées cylindriques de M.

Si nous remplaçons ds^2 par son expression en fonction des coordonnées cylindriques du point M, nous obtenons finalement l'équation

$$(\rho^2 - K^2)(dz^2 + d\rho^2) - K^2 \rho^2 d\theta^2 = 0 , \qquad (2)$$

qui est l'équation différentielle des courbes cherchées. (2) peut être traitée de bien des façons; si on lui adjoint une relation quelconque entre ρ, θ, z: $f(\rho, \theta, z) = 0$, le système obtenu donne toutes les courbes (Γ) de paramètre K situées sur la surface $f(\rho, \theta, z) = 0$. On voit qu'une surface donnée, pour un axe Oz donné, contient ∞^2 courbes (Γ).

II. *Courbes* (Γ) *situées sur une surface de révolution autour de* Oz. — Toute courbe pouvant être considérée comme située sur une surface de révolution d'axe Oz, nous obtiendrons toutes les courbes (Γ) en cherchant celles de ces courbes tracées sur la surface générale de révolution autour de Oz.

Définissons une telle surface par sa méridienne

$$z = f(\rho) .$$

L'équation (2) devient:

$$(\rho^2 - K^2)(1 + f'^2)\, d\rho^2 - K^2 \rho^2 d\theta^2 = 0 ,$$

d'où, pour déterminer θ en fonction de ρ, et en négligeant une symétrie par rapport à un plan méridien, l'intégrale suivante

$$\theta = \frac{1}{K} \int \sqrt{(\rho^2 - K^2)(1 + f'^2)}\, \frac{d\rho}{\rho} . \qquad (3)$$

L'intégrale (3) sera étudiée plus loin en détail; nous nous bornerons pour l'instant à en déduire les courbes (Γ) de quelques surfaces simples.

Courbes (Γ) *sur la sphère.* — L'équation de la sphère étant $z^2 + \rho^2 = R^2$, (3) prend la forme

$$\theta = \frac{R}{K} \int \sqrt{\frac{\rho^2 - K^2}{R^2 - \rho^2}} \frac{d\rho}{\rho} .$$

On trouve en effectuant l'intégration

$$\theta = \frac{R}{K} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{\rho^2 - K^2}{R^2 - \rho^2}} - \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{R}{K} \sqrt{\frac{\rho^2 - K^2}{R^2 - \rho^2}} \right) .$$

Les courbes (Γ) sur la sphère n'existent, comme l'on voit, que si $K < R$. Elles se projettent sur xOy entre la circonférence de centre O et de rayon K et l'équateur. Leurs projections sont tangentes à l'équateur aux points où elles le rencontrent, et les points où elles rencontrent le cercle de centre O et de rayon K sont des points de rebroussement. Ces projections ont l'allure d'épicycloïdes; nous allons établir que ce sont effectivement des épicycloïdes en montrant que les courbes (Γ) sont des hélices sphériques. Pour une courbe (Γ) de la sphère correspondant à la valeur K du paramètre (c'est-à-dire à la valeur $a = 2K\pi$ du rapport entre l'aire et l'arc) on a

$$\frac{dA}{ds} = a$$

(dA étant l'aire engendrée par la rotation de l'arc ds de (Γ) autour de Oz); mais

$$dA = 2\pi R\, dz , \qquad (dz = \text{projection de } ds \text{ sur } Oz) ,$$

on a donc

$$2\pi R \frac{dz}{ds} = a , \qquad \text{ou :} \qquad \frac{dz}{ds} = \frac{a}{2\pi R} = \text{const.}$$

Or, $\frac{dz}{ds}$ est le cosinus de l'angle que fait la tangente à (Γ) en l'élément envisagé avec Oz; l'angle étant constant (Γ) est bien une hélice sphérique.

Courbes (Γ) *sur les cônes de révolution.* — La méridienne étant $z = l\rho$, l'intégrale (3) est ici

$$\theta = \frac{\sqrt{1 + l^2}}{K} \int \frac{\sqrt{\rho^2 - K^2}}{\rho} d\rho .$$

L'intégration donne

$$\theta = \sqrt{1 + l^2}\left(\frac{\sqrt{\rho^2 - K^2}}{K} - \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{\rho^2 - K^2}}{K}\right).$$

Sur les cônes de révolution, les courbes (Γ) relatives à l'axe se déterminent complètement, comme pour la sphère.

Si $l = 0$, l'équation qui lie θ et ρ est celle des développantes de cercle: *les courbes planes qui, par rotation autour d'un point du plan, donnent des aires proportionnelles aux arcs, sont les développantes des cercles centrés au centre de rotation.*

Courbes (Γ) *sur l'hyperboloïde de révolution à une nappe.* — L'équation de la méridienne de l'hyperboloïde étant

$$\frac{\rho^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0\ ,$$

l'intégrale (3) qui donne θ est

$$\theta = \frac{1}{Ka}\int\sqrt{\frac{(\rho^2 - K^2)(c^2\rho^2 - a^4)}{\rho^2 - a^2}}\,\frac{d\rho}{\rho}\ , \qquad (c^2 = a^2 + b^2)\ .$$

Si $K = a$, on peut calculer simplement θ

$$\theta = \frac{1}{a^2}\int\sqrt{c^2\rho^2 - a^4}\,\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\sqrt{c^2\rho^2 - a^4}}{a^2} - \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{c^2\rho^2 - a^4}}{a^2}\ .$$

Si l'on pose $\frac{\sqrt{c^2\rho^2 - a^4}}{a^2} = u$, on constate que les expressions de x, y, coordonnées de la projection du point courant de (Γ) sur xOy, ont les formes

$$x = \frac{a^2}{c}(\cos u + u \sin u)\ ,$$

$$y = \frac{a^2}{c}(\sin u - u \cos u)\ .$$

Les courbes (Γ) de paramètre a de l'hyperboloïde se projettent donc sur le plan xOy suivant les développantes du cercle concentrique au cercle de gorge de rayon $\frac{a^2}{c}$, ou du moins suivant les portions de ces développantes extérieures au cercle de gorge.

On déduit de là la remarque suivante: Considérons la famille d'hyperboloïdes de révolution à une nappe

$$(\mathcal{H}) \qquad \frac{\rho^2}{a^2} - \frac{z^2}{\frac{a^2}{m^2}(a^2 - m^2)} - 1 = 0 ,$$

où a est un paramètre variable et m une constante ($a > m$). Pour tous les $(\mathcal{H})$, $\frac{a^2}{c}$ a la même valeur m; si donc on considère les sections des différents hyperboloïdes par le cylindre (C) ayant pour base la développante de cercle

$$x = m(\cos u + u \sin u) ,$$
$$y = m(\sin u - u \cos u) ,$$

ces sections seront des courbes (Γ) de paramètre a (demi-axe transverse de l'hyperboloïde envisagé).

La famille $(\mathcal{H})$ détermine, sur le cylindre (C), ∞^1 courbes (Γ) qui, avec celles que l'on en déduit par translation parallèlement aux génératrices, constituent la *totalité* des courbes (Γ) du cylindre.

Pour un hyperboloïde $(\mathcal{H})$, le cylindre de révolution d'axe Oz et de rayon $m = \frac{a^2}{c}$ peut être appelé *cylindre directeur*; ce qui précède permet alors d'énoncer le résultat suivant:

L'ensemble des courbes (Γ) *de l'espace, relatives à un axe* Oz, *conservant leur propriété de proportionnalité par projection orthogonale sur un plan perpendiculaire à* Oz, *s'obtient, en considérant les différents hyperboloïdes de révolution à une nappe d'axe* Oz, *et en les coupant par les cylindres droits ayant pour base une développante d'une section droite de leurs cylindres directeurs.*

Une propriété des courbes (Γ) *des cônes de révolution.* — Transformons par une inversion de pôle O une courbe (Γ) quelconque relative à l'axe Oz du système Oxyz, et cherchons ce que devient la relation caractéristique

$$\rho \sin \varphi = K . \qquad (1)$$

M et M′ étant deux points inverses sur (Γ) et sur son inverse (Γ') respectivement, posons OM $= r$, OM′ $= r'$, et soient Mu, M′u'

les normales en M, M′ au plan zOM. L'angle que fait (Γ) avec Mu est l'angle φ qui intervient dans l'équation (1) de (Γ); l'angle que fait (Γ′) avec M′u', soit φ', est égal à φ. On a

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{r'}{r}\ , \quad rr' = \lambda\ , \quad (\lambda = \text{puissance d'inversion})\ ;$$

d'où l'on déduit

$$\rho = \frac{r\rho'}{r'} = \frac{\lambda\rho'}{r'^2}\ .$$

Portons cette expression de ρ dans (1), nous obtenons, pour la courbe (Γ′), en tenant compte de $\varphi = \varphi'$, l'équation

$$\frac{\rho'}{r'^2} \sin \varphi' = \frac{K}{\lambda} = \text{const.}\ .$$

Telle est la relation à laquelle satisfont les courbes (Γ′). Cette relation est susceptible d'une interprétation géométrique simple si (Γ) est tracée sur un cône de révolution de sommet O et d'axe Oz. On a alors $\frac{r'}{\rho'}$ = const., et par suite

$$\frac{r'}{\sin \varphi'} = h \text{ (const.)}\ .$$

Si P′ est le point où la tangente en M′ à (Γ′) perce le plan xOy, on vérifie aussitôt que $\frac{r'}{\sin \varphi'}$ = M′P′; la relation ci-dessus peut donc s'écrire M′P′ = h, et montre que:

Les inverses des courbes (Γ) *des cônes de révolution de sommet* O *et d'axe* Oz, *dans les inversions de pôle* O, *sont les courbes telles que leur tangente, limitée au point de contact et au point d'intersection avec le plan perpendiculaire en* O *à l'axe du cône, ait une longueur constante (tractrices coniques).*

Si l'on envisage, plus particulièrement, le plan comme un cône de révolution d'angle au sommet π, on arrive à ce résultat que *les inverses des développantes des cercles de centre* O, *dans des inversions de pôle* O, *sont des courbes à tangente polaire constante.*

III. *Les courbes* (Γ) *et les géodésiques des surfaces de révolution.* — L'élément linéaire d'une surface de révolution étant mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + \rho^2 dv^2 ,$$

ρ étant une fonction de u, u désignant l'arc de méridien compté à partir d'une origine fixe et ρ la distance du point $M(u, v)$ à l'axe, on sait que l'équation des géodésiques de la surface est

$$v = K \int \frac{du}{\rho\sqrt{\rho^2 - K^2}} + a , \quad (K , a = \text{const.}) .$$

Les géodésiques correspondant à la même valeur de K (que nous dirons de *paramètre* K), ont pour équation différentielle

$$dv = \frac{K du}{\rho\sqrt{\rho^2 - K^2}} .$$

L'équation précédente peut se mettre sous la forme *(Clairaut)*,

$$\rho \sin \omega = K ,$$

où ω est l'angle que fait, en chaque point M de la surface, la géodésique qui y passe avec le méridien.

Cela étant, nous avons vu au n° I, que si φ est l'angle que fait une courbe (Γ) de paramètre K de la surface issue de M, avec la normale en M au plan méridien, c'est-à-dire avec le parallèle du point M, on a

$$\rho \sin \varphi = K .$$

La comparaison de cette relation avec la relation de Clairaut montre que l'on a $\varphi = \omega$, et que, par suite, une géodésique de paramètre K passant par M, et l'une des deux courbes (Γ) (symétriques par rapport au plan méridien de M) de même paramètre K issues de M, sont *orthogonales*. Les courbes (Γ) de paramètre K d'une surface de révolution prennent, comme l'on voit, une physionomie très simple: *ce sont les trajectoires orthogonales des géodésiques de même paramètre de la surface (déduites de l'une d'elles par rotation autour de l'axe).*

On sait que les lignes géodésiques d'une surface de révolution jouissent d'une propriété de proportionnalité très simple:

l'aire comprise entre la projection d'un arc de géodésique sur un plan normal à l'axe et les rayons vecteurs des extrémités de la projection de l'arc, est *proportionnelle à l'arc de géodésique.* Il est remarquable que les trajectoires orthogonales des différentes familles de géodésiques de même paramètre jouissent, elles aussi, d'une propriété de proportionnalité aussi simple que celle qui vient d'être mise en évidence.

IV. *Détermination de surfaces de révolution sur lesquelles on peut déterminer complètement les géodésiques.* — Envisageons une surface quelconque d'élément linéaire

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

et soit $\Delta\theta = 1$ l'équation attachée à cette surface pour la détermination de ses lignes géodésiques; $\Delta\theta$ est le paramètre différentiel du premier ordre de la fonction θ de u, v, soit

$$\Delta\theta = \frac{G\left(\frac{\partial\theta}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\theta}{\partial u}\frac{\partial\theta}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\theta}{\partial v}\right)^2}{EG - F^2}.$$

On sait qu'à toute solution de l'équation $\Delta\theta = 1$ correspond une famille de courbes parallèles de la surface, et que si l'on a pu déterminer une famille de courbes parallèles contenant une constante arbitraire autre que celle qui peut être ajoutée à θ, les équations finies des géodésiques se déterminent par de simples dérivations.

La connaissance de toutes les familles de courbes (Γ), correspondant aux différentes valeurs du paramètre K, sur une surface de révolution, permettra donc de déterminer, par de simples dérivations, les équations finies des géodésiques de la surface.

L'équation des projections sur le plan xOy des géodésiques de la surface de révolution d'équation $z = f(\rho)$ est, comme l'on sait, en coordonnées polaires

$$\theta = K\int \frac{\sqrt{1 + f'^2}}{\rho\sqrt{\rho^2 - K^2}}\,d\rho \quad (K = \text{const. arbitraire}). \qquad (4)$$

L'équation des courbes (Γ) de paramètre K de la même surface est, comme on l'a vu au n° II.

$$\theta = \frac{1}{K}\int \sqrt{(\rho^2 - K^2)(1 + f'^2)}\,\frac{d\rho}{\rho}. \qquad (5)$$

Supposons que l'on ait pu calculer l'intégrale qui rentre dans (5); désignons-la par $\Phi(\rho, K)$:

$$\int \sqrt{(\rho^2 - K^2)(1 + f'^2)}\,\frac{d\rho}{\rho} = \Phi(\rho, K).$$

Dérivons par rapport à K les deux membres de l'égalité précédente en regardant ρ comme une constante; nous obtenons

$$K\int \frac{\sqrt{1 + f'^2}}{\rho\sqrt{\rho^2 - K^2}} = -\frac{\partial\Phi(\rho, K)}{\partial K}.$$

Cette égalité fait connaître le deuxième membre de l'équation (4) qui définit les géodésiques de la surface. Les lignes géodésiques s'obtiennent comme l'on voit par dérivation de la fonction $\Phi(\rho, K)$ par rapport à K. Leur équation est

$$\theta = -\frac{\partial\Phi(\rho, K)}{\partial K}.$$

Pour obtenir quelques surfaces de révolution sur lesquelles on peut effectuer la détermination complète des géodésiques, donnons-nous, *a priori*, une famille de courbes du plan xOy, définies à une rotation près autour de O par l'équation dépendant du paramètre K

$$\theta = \frac{1}{K}\Phi(\rho, K),$$

et cherchons à déterminer la surface de révolution d'équation $z = f(\rho)$ par la condition que ses courbes (Γ) se projettent sur xOy précisément suivant la famille précédente.

La question revient à déterminer la fonction $f(\rho)$ de façon que

$$\int \sqrt{(\rho^2 - K^2)(1 + f'^2)}\,\frac{d\rho}{\rho} = \Phi(\rho, K).$$

Tirons $f(\rho)$ de cette équation; nous obtenons en négligeant une symétrie par rapport au plan xOy

$$f' = \sqrt{\frac{\rho^2}{\rho^2 - K^2}\left[\frac{\partial \Phi(\rho, K)}{\partial \rho}\right]^2 - 1} .$$

On pourra déterminer f par une quadrature si la quantité sous le radical est indépendante de K, c'est-à-dire si l'expression

$$\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - K^2}} \frac{\partial \Phi(\rho, K)}{\partial \rho} = \varphi(\rho) ,$$

soit

$$\Phi(\rho, K) = \int \frac{\varphi(\rho)\sqrt{\rho^2 - K^2}}{\rho} d\rho .$$

Si l'intégrale précédente peut être calculée, la surface de révolution d'équation

$$z = f(\rho) = \int \sqrt{\varphi^2(\rho) - 1}\, d\rho$$

aura ses courbes (Γ) définies en projection sur xOy par l'équation

$$\theta = \frac{1}{K}\Phi(\rho, K) = \frac{1}{K}\int \frac{\varphi(\rho)\sqrt{\rho^2 - K^2}}{\rho} d\rho ,$$

et ses géodésiques par l'équation

$$\theta = -\frac{\partial \Phi(\rho, K)}{\partial K} .$$

Si l'intégrale qui donne z peut être calculée en même temps que celle qui donne $\Phi(\rho, K)$, on aura une surface de révolution sur laquelle on saura déterminer complètement toutes les courbes (Γ) et toutes les géodésiques. On peut donner des exemples en prenant pour $\varphi(\rho)$ soit des polynômes soit des fractions rationnelles.

Si $\varphi(\rho) = a$, on a

$$f = \sqrt{a^2 - 1}\, \rho ,$$

et l'on obtient les cônes de révolution autour de Oz, sur lesquels on sait en effet déterminer toutes les courbes (Γ) et toutes les géodésiques.

Si $\varphi(\rho) = a\rho + b$, la surface de révolution a pour équation

$$z = \int \sqrt{(a\rho + b)^2 - 1}\, d\rho ,$$

soit

$$z = \frac{1}{2a}\left[(a\rho + b)\sqrt{(a\rho + b)^2 - 1} - \operatorname{Log}\left(a\rho + b + \sqrt{(a\rho + b)^2 - 1}\right)\right].$$

Les courbes (Γ) de la surface précédente se projettent sur le plan xOy suivant les courbes définies par l'équation

$$\theta = \frac{1}{K}\int \frac{(a\rho + b)\sqrt{\rho^2 - K^2}}{\rho}\, d\rho .$$

L'intégration donne

$$\theta = \frac{1}{2K}(a\rho + b)\sqrt{\rho^2 - K^2} - \\ - \frac{aK}{2}\operatorname{Log}\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - K^2}}{K} - b \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\rho^2 - K^2}}{K} .$$

Les lignes géodésiques de la surface sont définies comme on a vu par l'équation

$$\theta = -\frac{\partial \Phi(\rho, K)}{\partial K} .$$

On trouve en effectuant le calcul de dérivation

$$\theta = aK \operatorname{Log}\frac{\rho + \sqrt{\rho^2 - K^2}}{K} + b \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\rho^2 - K^2}}{K} .$$

Si $\varphi(\rho) = \dfrac{a\rho + b}{c\rho + d}$, la surface de révolution a pour équation

$$z = \int \sqrt{\left(\frac{a\rho + b}{c\rho + d}\right)^2 - 1}\, d\rho .$$

Dans le cas particulier où $a = c$ le calcul d'intégration se simplifie un peu, et l'on obtient pour la méridienne de la surface dans le plan xOz les équations paramétriques

$$z = \frac{b - d}{a}\left(\operatorname{Log} t + \frac{4}{1 + t}\right),$$

$$x = \frac{dt^2 + 2bt + d}{-a(t + 1)^2} .$$

Sur toutes les surfaces obtenues en faisant varier a, b, d dans les expressions ci-dessus, on sait déterminer toutes les courbes (Γ) et toutes les géodésiques.

Prenons enfin $\varphi = a\rho^2 + 1$. La surface a pour équation

$$z = \int \sqrt{(a\rho^2 + 1)^2 - 1}\, d\rho .$$

En intégrant on obtient

$$z^2 = \frac{1}{9a}(a\rho^2 + 2)^3 .$$

Cette équation représente une surface de révolution algébrique du sixième degré. Les courbes (Γ) de cette surface se projettent sur le plan xOy suivant les courbes définies par l'équation

$$\theta = \frac{1}{K}\int \frac{(a\rho^2 + 1)\sqrt{\rho^2 - K^2}}{\rho}\, d\rho ,$$

soit

$$\theta = \frac{1}{K}\left[\frac{a}{3}(\rho^2 - K^2)^{\frac{3}{2}} + (\rho^2 - K^2)^{\frac{1}{2}} - K \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\rho^2 - K^2}}{K}\right].$$

Les lignes géodésiques se projettent sur xOy suivant les courbes

$$\theta = -\frac{\partial \Phi(\rho, K)}{\partial K} ,$$

où Φ est la quantité entre crochets ci-dessus.

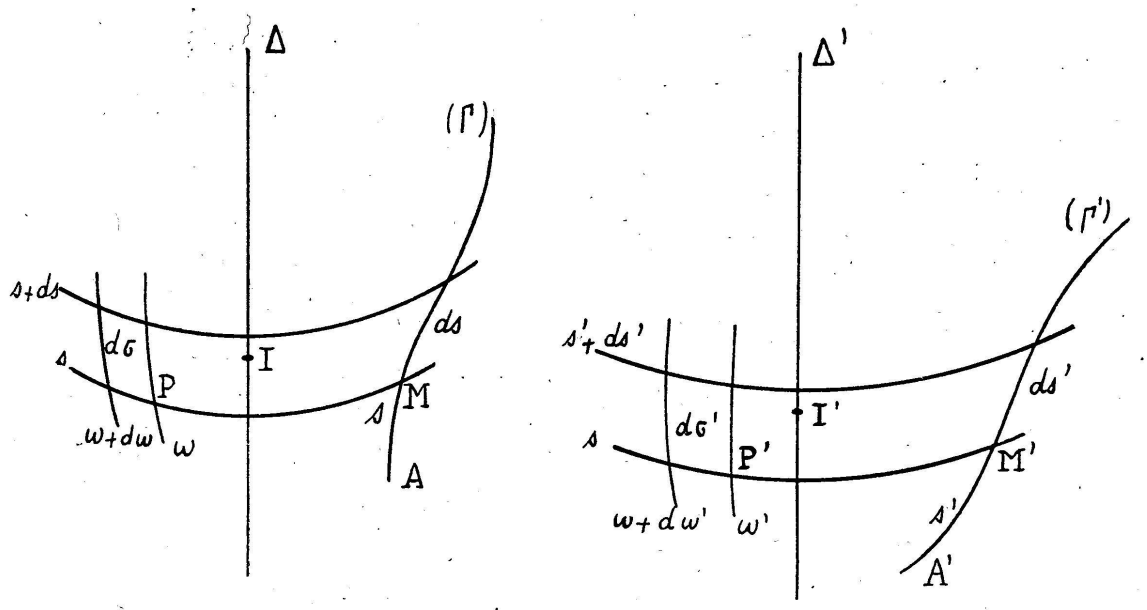
On trouve en effectuant le calcul de dérivation

$$\theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{\rho^2 - K^2}}{K} + aK(\rho^2 - K^2)^{\frac{1}{2}} .$$

V. *Les courbes* (Γ) *et la représentation d'une surface de révolution sur une autre avec égalité des aires correspondantes.* — La propriété que possèdent les trajectoires orthogonales d'une famille de géodésiques, de même paramètre, d'une surface de révolution, d'engendrer par rotation autour de l'axe de la surface des aires proportionnelles aux arcs, fait que ces courbes interviennent simplement dans le problème de la représentation

d'une surface de révolution sur une autre surface de révolution (ou sur un plan) avec conservation des aires.

Soient (Σ) et (Σ') deux surfaces de révolution d'axes (Δ) et (Δ'). Imaginons, sur ces deux surfaces, deux familles de courbes (Γ): une famille sur (Σ) de paramètre K et une famille sur (Σ') de paramètre K′ (fig. 1). Désignons plus particulièrement par (Γ) l'une des courbes de la famille envisagée sur (Σ) et par (Γ') l'une des courbes de la famille envisagée sur (Σ').



(fig 1)

Prenons sur (Γ) un point fixe A et sur (Γ') un point fixe A′. Soit P un point quelconque de (Σ) situé sur la zône occupée par (Γ); désignons par M le point où le parallèle du point P coupe (Γ), par s l'arc AM de (Γ) et par ω l'angle $\widehat{IM, IP}$ (I étant le centre du parallèle de P); s et ω peuvent être regardées comme des coordonnées pour le point P de (Σ).

Définissons de même deux coordonnées d'un point P′ de (Σ'):

$$s' = \text{arc } A'M' \text{ de } (\Gamma') , \qquad \omega' = \widehat{I'M', I'P'}$$

(on a choisi des sens positifs sur (Γ), (Γ') et un sens positif pour les rotations autour de (Δ), (Δ')).

Si l'on établit entre s' et s, ω' et ω deux relations quelconques,

ces relations définissent une correspondance ponctuelle entre (Σ) et (Σ'), plus précisément entre les zones occupées par (Γ) et (Γ'). Si l'on prend pour équations définissant la correspondance les suivantes

$$s' = \lambda \frac{K}{K'} s \ , \qquad \omega' = \frac{1}{\lambda} \omega \qquad (\lambda = \text{const.}) \tag{6}$$

la correspondance jouit de la propriété que les éléments superficiels homologues ont même aire, et par conséquent fournit une représentation de l'une quelconque des deux surfaces sur l'autre (de l'une des zônes occupées par (Γ), (Γ') sur l'autre) dans laquelle les aires sont conservées.

Envisageons, en effet, sur (Σ) le réseau formé par les courbes $\omega = \text{const.}$ (courbes (Γ) de paramètre K, qui se déduisent de l'une d'elles par rotation autour de (Δ)) et par les courbes $s = \text{const.}$ (parallèles). Envisageons de même sur (Σ') le réseau correspondant. Soit $d\sigma$ (fig. 1) l'élément d'aire limité sur (Σ) par les courbes (Γ) correspondant aux valeurs ω et $\omega + d\omega$ de l'angle ω et par les parallèles correspondant aux valeurs s et $s + ds$ de l'arc s; soit de même $d\sigma'$ l'élément d'aire limité sur (Σ') par les courbes (Γ') correspondant à ω' et $\omega' + d\omega'$ et par les parallèles correspondant à s' et $s' + ds'$; s' et ω' sont liés à s et ω par les formules (6) qui définissent la correspondance entre (Σ) et (Σ').

Si dA désigne l'aire engendrée par l'arc ds de (Γ) effectuant une rotation complète autour de (Δ), on voit que

$$d\sigma = \frac{dA \cdot d\omega}{2\pi} \ ;$$

de même

$$d\sigma' = \frac{dA' \cdot d\omega'}{2\pi} \ ;$$

mais

$$\frac{dA}{ds} = 2K\pi \ , \qquad \frac{dA'}{ds'} = 2K'\pi \ ;$$

on a donc

$$d\sigma = K\, ds\, d\omega \ , \qquad d\sigma' = K' ds' d\omega' \ .$$

Les relations (6) montrent que

$$ds' = \lambda \frac{K}{K'} ds \ , \qquad d\omega' = d\omega \ ,$$

et que par suite

$$d\sigma' = K\, ds\, d\omega = d\sigma \ .$$

La correspondance envisagée conserve bien les aires.

Si $\lambda = 1$, $K' = K$, les formules (6) deviennent

$$s' = s \ , \qquad \omega' = \omega \ .$$

Si donc on considère sur deux surfaces de révolution deux familles de trajectoires orthogonales de géodésiques de même paramètre, si l'on faït se correspondre les courbes de chaque famille correspondant à une même rotation autour de l'axe à partir d'une position initiale déterminée, et si l'on prend sur deux courbes correspondantes, à partir de deux parallèles quelconques mais fixes sur les deux surfaces, des arcs de même longueur, on obtient des points qui se correspondent sur les deux surfaces avec égalité des aires homologues.

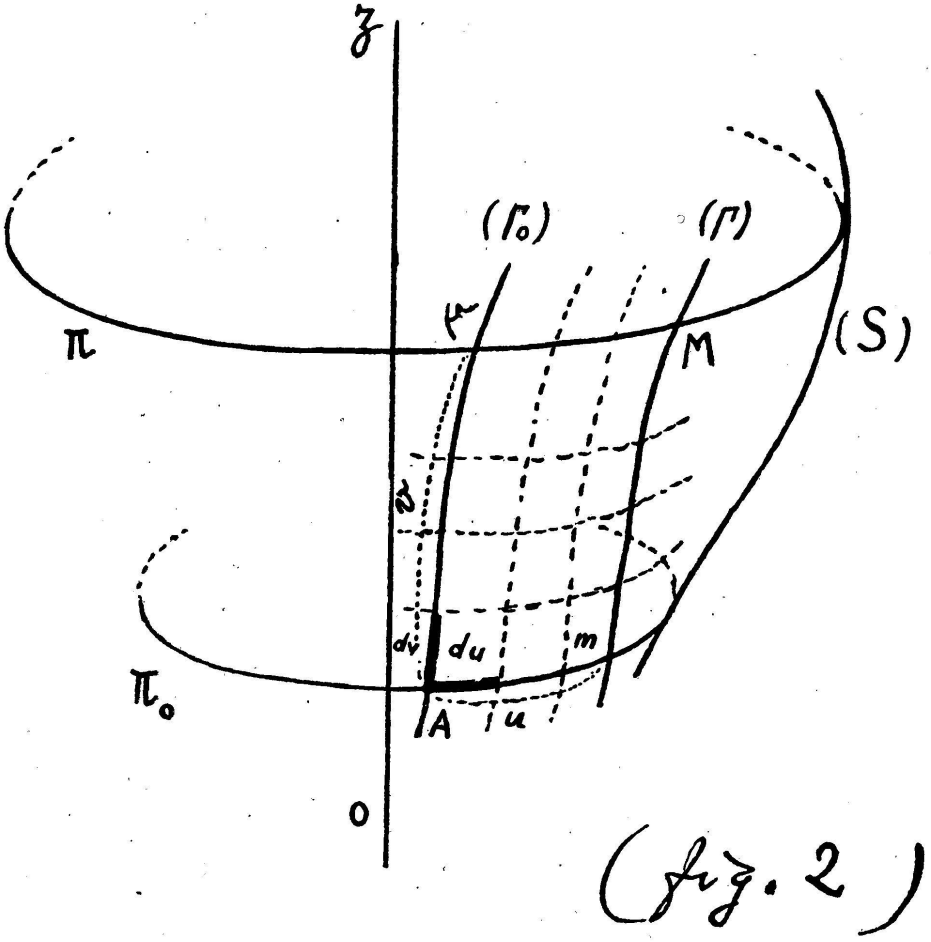
On peut, sans que la correspondance obtenue cesse de conserver les aires, remplacer les deux parallèles à partir desquels on compte les arcs, par deux courbes absolument quelconques. Si ces courbes sont des géodésiques trajectoires orthogonales des familles de courbes (Γ) envisagées sur les deux surfaces, le procédé de représentation est un cas particulier du suivant:

Si l'on envisage sur deux surfaces quelconques deux familles de trajectoires orthogonales de géodésiques, si l'on fait se correspondre par arcs égaux, sur les deux surfaces, deux géodésiques fixes orthogonales aux courbes des deux familles considérées, et si l'on prend sur deux trajectoires orthogonales correspondantes, à partir des points où ces courbes rencontrent les géodésiques fixes, des arcs de même longueur, on obtient, sur les deux surfaces, des points se correspondant dans une représentation par aires constantes de l'une des deux surfaces sur l'autre.

Pour donner une application simple de la considération des trajectoires orthogonales d'une famille de géodésiques de même paramètre d'une surface de révolution en tant que courbes (Γ),

nous allons nous proposer de rechercher la forme qu'affecte l'élément linéaire de la surface, lorsqu'on prend pour lignes coordonnées les parallèles et les trajectoires orthogonales d'une famille de géodésiques de même paramètre.

Envisageons une surface de révolution (S) et, sur cette surface, une famille de courbes (Γ) de même paramètre K (fig. 2).



Prenons sur (S), comme lignes coordonnées, les parallèles et les courbes (Γ) de paramètre K. Soit A un point de (S); choisissons comme variables, pour fixer la position d'un point quelconque M de (S), situé sur la zône occupée par (Γ), la longueur u de l'arc Am du parallèle π_0 qui passe par A (m étant l'intersection de la courbe (Γ) qui passe par M avec π_0) et la longueur v de l'arc Aμ de la courbe (Γ_0) issue de A (μ étant le point où le parallèle de M coupe (Γ_0)).

Avec ce système de coordonnées, on constate facilement que, si l'on fait croître u, v par degrés égaux, on partage (S) en éléments de même aire:

Deux éléments compris entre deux parallèles consécutifs sont en effet égaux et ont par suite même aire; deux éléments compris entre deux parallèles non consécutifs sont engendrés par des arcs égaux d'une même courbe (Γ) tournant d'angles égaux autour de l'axe de la surface et ont par suite eux aussi même aire.

Avec les notations classiques, l'élément d'aire sur (S) a pour expression $\sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$. La valeur de $EG - F^2$ est, d'après ce qui précède, *indépendante de la position du point* M; nous pouvons donc poser

$$EG - F^2 = \lambda^2 , \qquad (\lambda = \text{const.}) .$$

D'autre part, en tous les points d'un même parallèle π, les différentes courbes (Γ) de paramètre K coupent π sous le même angle, et l'expression du cosinus de l'angle ω des courbes coordonnées ne dépend que de v. On a

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}} ;$$

on peut donc poser

$$\frac{F^2}{EG} = f(v) .$$

Si l'on se déplace sur la courbe $u = \text{const.}$, on a $ds = dv$ quel que soit u, donc $G = 1$.

Les coefficients F et G de l'élément linéaire de (S) sont liés par les deux relations

$$E - F^2 = \lambda^2 , \qquad \frac{F^2}{E} = f(v) .$$

Si l'on remplace dans la première de ces deux relations F^2 par son expression tirée de la deuxième, on obtient

$$E\big(1 - f(v)\big) = \lambda^2 .$$

E est donc uniquement fonction de v, et il en est de même de F. Toutes ces remarques montrent que l'élément linéaire de la surface peut s'écrire

$$ds^2 = (F^2 + \lambda^2)\, du^2 + 2F\, du\, dv + dv^2 , \qquad (7)$$

où F est uniquement fonction de v.

Il est d'ailleurs facile de voir que si l'élément linéaire d'une surface est donné *a priori* sous la forme (7), la surface est applicable sur une surface de révolution, et que les courbes v = const. et u = const. sont, respectivement, les déformées des parallèles et d'une famille de géodésiques de même paramètre. Le fait que la surface est applicable sur une surface de révolution résulte de ce que E, F, G ne dépendent que de l'une des deux variables u, v. Cela étant, prenons pour nouvelle variable, à la place de u, la quantité σ définie par la relation

$$\sigma = u + \int \frac{F}{F^2 + \lambda} dv \ ;$$

dans ces conditions

$$du = d\sigma - \frac{F}{F^2 + \lambda^2} dv \ ,$$

et l'élément linéaire (7) devient

$$ds^2 = (F^2 + \lambda^2) d\sigma^2 + \frac{\lambda^2 - F^2}{F^2 + \lambda^2} dv^2 \ .$$

Si l'on pose

$$v' = \int \frac{\lambda^2 - F^2}{F^2 + \lambda^2} dv \ ,$$

on obtient

$$ds^2 = \varphi(v') d\sigma^2 + dv'^2 \ .$$

On reconnaît, sous cette forme, que les courbes v' = const., c'est-à-dire v = const., sont les déformées des parallèles.

Il reste maintenant à établir que les courbes u = const. sont les déformées d'une famille de trajectoires orthogonales de géodésiques de même paramètre, c'est-à-dire d'une famille de courbes (Γ) de même paramètre, de la surface de révolution sur laquelle s'applique la surface envisagée.

Considérons cette surface de révolution; les longueurs des arcs de deux courbes u = const. quelconques ($u = u_1$, $u = u_2$) compris entre deux parallèles quelconques ($v = v_1$, $v = v_2$), étant égales comme l'indique l'expression (7) de l'élément linéaire, ces deux courbes sont, ou bien applicables par rotation autour de l'axe de la surface, ou bien symétriques par rapport à un plan méridien; il n'y a qu'à envisager deux courbes correspondant à

des valeurs voisines de u_1, u_2 pour voir qu'elles sont applicables par rotation.

Il suffit maintenant d'établir que l'aire limitée par deux courbes u = const. quelconques *fixes*, correspondant aux valeurs u et u' de la variable u, et par deux courbes v = const. quelconques (v, $v + dv$), est proportionnelle à dv (élément d'arc de la courbe u), pour avoir établi la proposition.

Soit dA (fig. 3) l'aire en question, on a

$$dA = \lambda \iint_{ABCD} du\, dv = \lambda (u_1 - u)\, dv \ ,$$

et par suite

$$\frac{dA}{dv} = \lambda (u_1 - u) = \text{const.}$$

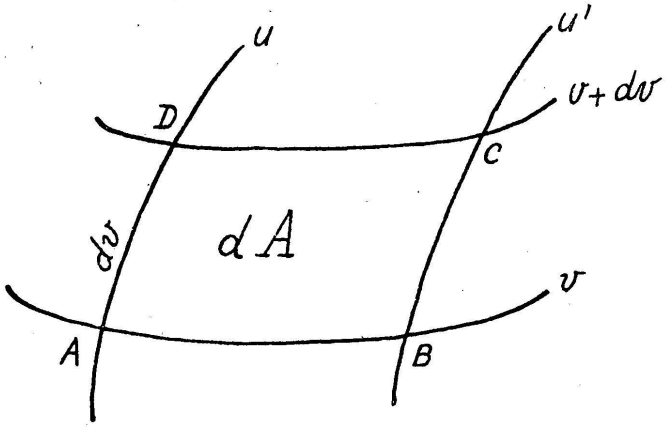


Fig. 3.

Les courbes u = const. sont bien des courbes (Γ) de même paramètre de la surface de révolution, et par suite, sur la surface donnée, les courbes u = const. sont les déformées d'une famille de trajectoires orthogonales de géodésiques de même paramètre.

Le problème de la recherche des différentes familles de trajectoires orthogonales de géodésiques de même paramètre d'une surface de révolution, est donc identique à celui de la mise de l'élément linéaire de la surface sous la forme (7).

(7) met en évidence les trajectoires orthogonales des courbes (Γ), c'est-à-dire les géodésiques correspondantes; on peut écrire

$$ds^2 = (F\, du + dv)^2 + \lambda^2 du^2 = F^2 \left(du + \frac{dv}{F} \right)^2 + \lambda^2 du^2 \ ,$$

et l'on voit que les géodésiques ont pour équation

$$u + \int \frac{dv}{F} = \text{const.} \ .$$

Nous avons vu plus haut comment la connaissance d'une famille de courbes (Γ) sur une surface de révolution permet de

représenter cette surface sur un plan (envisagé comme une surface de révolution) avec conservation des aires, les courbes (Γ) de la surface venant se représenter sur une famille de courbes (Γ) du plan, c'est-à-dire sur une famille de développantes de cercles.

Le rôle que jouent les courbes (Γ) dans la décomposition d'une surface de révolution en éléments de même aire, rattache simplement ces courbes à des représentations planes de la surface, conservant également les aires, et d'une espèce un peu différente de la précédente.

Remarquons d'abord que, toutes les fois que la connaissance d'une famille de courbes (Γ) aura permis de mettre l'élément linéaire de la surface sous la forme (7), la constante λ qui intervient dans l'élément linéaire sera inférieure ou au plus, égale à 1. L'élément d'aire qui, pour deux valeurs déterminées de du et dv, a pour expression $\lambda\, du\, dv$, a en effet pour valeur maximum $du\, dv$. Cela étant, désignons par $d\sigma$ l'élément d'aire sur une surface de révolution rapportée au système de coordonnées curvilignes (u, v) dont il a été question plus haut; λ étant inférieur ou au plus égal à 1 on peut poser

$$\lambda = \sin\theta \ ;$$

dans ces conditions

$$d\sigma = \sin\theta\, du\, dv \ .$$

Traçons dans un plan deux axes de coordonnées $u'Ou$, $v'Ov$ faisant l'angle θ, et faisons se correspondre le point de la surface de coordonnées u, v et le point du plan précédent de coordonnées cartésiennes u, v; il est évident que la correspondance ainsi obtenue *conserve les aires.*

Les courbes $u =$ const. de la surface, c'est-à-dire les courbes (Γ), ont pour transformées, dans le plan, des parallèles à l'axe Ov, et les courbes $v =$ const., c'est-à-dire les parallèles, ont pour transformées des parallèles à Ou. Une zone de la surface se trouve représentée, par ce procédé, sur un parallélogramme du plan, tandis que tout à l'heure elle l'était sur une couronne circulaire.

Si l'on veut que les deux systèmes de droites du plan qui correspondent aux courbes (Γ) et aux parallèles, soient orthogonaux, il suffit, comme on s'en rend compte immédiatement, de compter les arcs sur les différentes courbes (Γ) à partir d'un

parallèle de la surface de rayon K (K étant le paramètre des courbes (Γ) envisagées).

VI. *Sur la représentation d'une surface quelconque sur un plan avec conservation des aires, de façon qu'une famille de courbes parallèles se représente suivant une famille de droites parallèles.* — Supposons qu'on ait pu mettre l'élément linéaire d'une surface *quelconque* sous la forme

$$ds^2 = (F^2 + \lambda^2)\,du^2 + 2F\,du\,dv + dv^2 \qquad (7)$$

où F est fonction de u *et de* v, et λ une constante ($\lambda \leqq 1$). On pourra alors dresser une carte de la surface sur un plan avec conservation des aires, tout comme on l'a fait pour les surfaces de révolution. Si l'on trace dans un plan deux axes de coordonnées $u'Ou$, $v'Ov$ faisant l'angle θ tel que $\sin\theta = \lambda$, et si l'on définit un point du plan par ses coordonnées cartésiennes (u, v), les points qui se correspondent sur la surface et sur le plan sont ceux qui correspondent aux mêmes valeurs de u, v.

Lorsque l'élément linéaire d'une surface aura été mis sous la forme précédente, les courbes $u =$ const. seront les trajectoires d'une famille de géodésiques; il suffit pour s'en rendre compte d'écrire l'élément linéaire sous la forme

$$ds^2 = (F\,du + dv)^2 + \lambda^2\,du^2 .$$

Réciproquement d'ailleurs, à toute famille de courbes parallèles sont attachées une infinité de mises de l'élément linéaire sous la forme (7), comme on le verra plus loin.

Soit

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

l'élément linéaire d'une surface donnée.

Proposons-nous de mettre cet élément sous la forme

$$ds^2 = (\alpha^2 + \lambda^2)\,dp^2 + 2\alpha\,dp\,dq + dq^2 ,$$

où λ est une constante inférieure ou au plus égale à 1, et α une

fonction à déterminer de p et de q. α, p, q doivent satisfaire aux trois équations

$$\left\{\begin{aligned} E &= (\alpha^2 + \lambda^2)\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2 + 2\alpha\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial u} + \left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2, \\ F &= (\alpha^2 + \lambda^2)\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + \alpha\left(\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial u}\right) + \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v}, \\ G &= (\alpha^2 + \lambda^2)\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 + 2\alpha\frac{\partial p}{\partial v}\frac{\partial q}{\partial v} + \left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

L'intégration du système (8) donne la solution de la question. Le problème de la mise de l'élément linéaire d'une surface sous une forme donnée d'avance, et en particulier sous la forme que nous cherchons à obtenir, peut, comme il est bien connu, se simplifier par l'emploi des invariants.

Dans le cas actuel, il suffit d'envisager l'invariant du premier ordre de p en prenant l'élément linéaire sous la forme $ds^2 = (\alpha^2 + \lambda^2)\,dp^2 + 2\alpha\,dp\,dq + dq^2$, pour avoir une équation à laquelle doit satisfaire p.

On a ici

$$\Delta p = \frac{1}{\lambda^2}.$$

En remplaçant Δp par son expression quand on prend l'élément linéaire sous la forme $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$, on obtient l'équation

$$\frac{E\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial p}{\partial v} + G\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} = \frac{1}{\lambda^2}, \tag{9}$$

à laquelle doit satisfaire p.

Cette équation est de celles dont l'intégration fournit les différentes familles de courbes parallèles de la surface; si $p(u, v)$ est une solution, on sait que l'équation $p(u, v) = a$, où a est une constante arbitraire, définit une famille de courbes parallèles.

Le problème que nous étudions pourra, comme l'on voit, être résolu si l'on peut déterminer une solution de (9), c'est-à-dire une famille de courbes parallèles, et à toute solution de (9) correspondent, d'après (8), une infinité d'expressions de q donnant chacune une solution particulière du problème.

Pour donner un exemple simple de représentation avec conservation des aires, par le procédé qui vient d'être indiqué, proposons-nous de représenter un plan P sur un autre plan Q. Prenons l'élément linéaire du plan Q sous la forme

$$ds^2 = du^2 + u^2\, d\varphi^2$$

qui correspond au système de coordonnées polaires (u étant le rayon vecteur et φ l'angle polaire).

Les coordonnées cartésiennes d'un point du plan sont

$$x = u \cos\varphi\ , \qquad y = u \sin\varphi\ .$$

Dans ce cas l'équation (9) qui donne p en fonction de u, φ s'écrit

$$\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial \varphi}\right)^2 + u^2\left(\frac{\partial p}{\partial u}\right)^2}{u^2} = \frac{1}{\lambda^2}\ .$$

Cette équation admet l'intégrale complète

$$p = \frac{\sqrt{u^2 - \lambda^2 a^2}}{\lambda} - a \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{u^2 - \lambda^2 a^2}}{\lambda a} + a\varphi + c\ , \quad (a,\ c = \text{const.})\ ,$$

d'où l'on déduit l'intégrale générale.

Prenons plus particulièrement pour p la forme simple

$$p = \frac{u}{\lambda}\ , \qquad (a = c = 0)\ . \tag{10}$$

La troisième équation du système (8) donne immédiatement l'expression de q qu'il faut adjoindre à p pour avoir une solution du problème; on trouve

$$\left(\frac{\partial q}{\partial \varphi}\right)^2 = u^2\ ;$$

prenons, par exemple, $\frac{\partial q}{\partial u} = u$; on obtient alors

$$q = u\varphi + \varphi(u) \qquad [\varphi = \text{fonction arbitraire}]\ . \tag{11}$$

Si l'on exprime, au moyen des équations (10) et (11), u et φ en fonction de p, q, et si l'on trace dans le plan P deux axes Op, Oq faisant entre eux l'angle $\widehat{pOq}$ tel que $\sin \widehat{pOq} = \lambda$, les points des deux plans P, Q de mêmes coordonnées p, q se correspondent avec égalité des aires.

On trouve en résolvant le système (10), (11)

$$u = \lambda p \ ,$$
$$v = \frac{q - \varphi(\lambda p)}{\lambda p} \ .$$

Les coordonnées cartésiennes des points des plans Q et P qui se correspondent sont:

$$\text{Plan Q (axes rectangulaires)} \begin{cases} x = \lambda p \cos\left[\dfrac{q - \varphi(\lambda p)}{\lambda p}\right] , \\ y = \lambda p \sin\left[\dfrac{q - \varphi(\lambda p)}{\lambda p}\right] ; \end{cases}$$

$$\text{Plan P (axes faisant l'angle } \widehat{pOq} \text{ tel que } \sin \widehat{pOq} = \lambda) \begin{cases} x = p \ , \\ y = q \ . \end{cases}$$

Si l'on suppose, par exemple, que l'on ait $\lambda = 1$, $\varphi = 0$, les équations précédentes prennent les formes simples

$$\begin{matrix}\text{Plan Q} \\ \text{(axes rectangulaires)}\end{matrix} \begin{cases} x = p \cos \dfrac{q}{p} \\ y = p \sin \dfrac{q}{p} \end{cases} ; \qquad \begin{matrix}\text{Plan P} \\ \text{(axes rectangulaires)}\end{matrix} \begin{cases} x = p \ , \\ y = q \ . \end{cases}$$

En désignant par X et Y les coordonnées du point du plan Q qui correspond au point de coordonnées x, y du plan P, les expressions de X et Y en fonction de x, y sont

$$\begin{cases} X = x \cos \dfrac{y}{x} \ , \\ Y = y \sin \dfrac{y}{x} \ . \end{cases} \tag{12}$$

Si Q est confondu avec P, on a une transformation du plan P en lui-même avec conservation des aires, et les formules (12) mettent en évidence la relation géométrique simple suivante entre les points M(x, y) et N(X, Y) qui se correspondent:

Le point M étant donné, pour construire le point correspondant N, on n'a qu'à tracer la circonférence (C) de centre O et de rayon OP (P étant le pied de l'ordonnée du point M), puis à porter sur (C), à partir de P, l'arc PN de longueur PM (ordonnée de M).

Lorsque M décrit des parallèles à Oy, N décrit des circonférences de centre O, et lorsque M décrit des parallèles à Ox, N décrit des spirales hyperboliques.