Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CUBIQUES D'EDOUARD LUCAS
Autor: Turrière, E.
Kapitel: Intersection des cubiques.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28591

Les résultats précédents introduisent des triangles C_0, C_1, C_2, dont les sommets sont les centres de coniques conjuguée, circonscrite, inscrite à axes parallèles. Ces triangles dépendent de quatre paramètres arbitraires, par rapport au triangle fondamental. Lorsque l'un des sommets est imposé, les deux autres ont pour lieux des coniques Leur étude ne me paraît pas avoir été faite.

INTERSECTION DES CUBIQUES.

17. — Les 9 points d'intersection des cubiques II et III sont

$$A \quad B \quad C \quad O \quad H \quad I \quad I' \quad I'' \quad I'''.$$

Les cubiques I et III se touchent en G; les 7 autres points d'intersection sont: A B C H et les points à l'infini des trois hauteurs.

Les cubiques I et II ont en commun

$$A \quad B \quad C \quad H \quad H_1 ;$$

l'équation de la première cubique

$$\left\| \begin{matrix} \alpha & \xi & \frac{1}{\xi} \end{matrix} \right\| = 0 ,$$

conduit à poser

$$\alpha = \lambda\xi + \frac{\mu}{\xi} .$$

En supposant que ξ, η, ζ soient racines de l'équation cubique

$$\xi^3 - S\xi^2 + Q\xi - P = 0 ,$$

l'identité $\Sigma\,\alpha\beta = 1$ donne tout d'abord :

$$\lambda^2 Q + \lambda\mu \cdot \frac{QS - 3P}{P} + \frac{S}{P}\mu^2 = 1 .$$

Les indéterminées λ et μ vérifient en outre la condition provenant de l'équation de la seconde cubique:

$$\left\| \begin{matrix} 2\beta\gamma - 1 & \xi & \frac{\beta + \gamma}{\xi} \end{matrix} \right\| = 0 .$$

En y substituant les expressions ci-dessus prises pour α, β, γ cette seconde condition devient, après suppression d'un facteur λ supposé non nul:

$$2(\lambda P - S\mu)^2 = S \cdot P\left[1 + 2\lambda\mu\left(1 - \frac{QS}{P}\right)\right].$$

L'élimination de la variable d'homogénéité entre les deux conditions qui lient μ à λ donne:

$$\mu^2 S^2 + \lambda\mu S(QS - 3P) + \lambda^2 P(2P - QS) = 0 ,$$

c'est-à-dire par décomposition

$$(\mu S - P\lambda) \cdot \left[\mu S + (QS - 2P)\lambda\right] = 0 .$$

A la solution

$$\frac{P}{\mu} = \frac{S}{\lambda}$$

correspond

$$\alpha = \xi S + \frac{P}{\xi} = (\xi + \eta)(\xi + \zeta) \ ; \quad \text{etc.},$$

donc:

$$\alpha(\eta + \zeta) = \beta(\zeta + \xi) = \gamma(\xi + \eta) \ ;$$

c'est le point H_1 de coordonnées absolues $\xi = 1 - 2\beta\gamma$, etc.

18. — A la solution

$$\frac{\lambda}{S} = \frac{\mu}{2P - QS} = \rho$$

correspond

$$\frac{\alpha}{\rho} = S\xi + \frac{2P - QS}{\xi} = \xi^2 - (\eta^2 + \eta\zeta + \zeta^2) - \frac{\eta\zeta}{\xi}(\eta + \zeta) ,$$

$$\alpha\frac{\xi}{\rho} = (\xi + \eta)(\xi + \zeta)(\xi - \eta - \zeta) \ ;$$

si les coordonnées sont absolues, posons:

$$\frac{\alpha\xi(1 - \xi)}{1 - 2\xi} = \frac{\beta\eta(1 - \eta)}{1 - 2\eta} = \frac{\gamma\zeta(1 - \zeta)}{1 - 2\zeta} = \frac{1}{2}pz$$

z étant une inconnue auxiliaire, avec:

$$\alpha + \beta + \gamma = s \qquad \Sigma \alpha\beta = 1 \qquad \alpha\beta\gamma = p .$$

D'où

$$\alpha\xi^2 - \alpha\xi - \frac{1}{2} pz(2\xi - 1) = 0$$

et par suite:

$$2\xi = 1 + \beta\gamma z + \varepsilon\sqrt{1 + \beta^2\gamma^2 z^2} \ , \quad \text{etc.}$$

L'inconnue z est donc racine de l'équation

$$0 = 1 + z + \Sigma\varepsilon\sqrt{1 + \beta^2\gamma^2 z^2} \ ,$$

provenant de la condition

$$\xi + \eta + \zeta = 1 .$$

L'élimination des radicaux conduit à une équation admettant la racine triple $z = 0$ et quatre autres racines, solutions de l'équation du quatrième degré suivante:

$$2p^3(p - s)z^4 + p^2(p^2 - 2ps - 1)z^3 + \\ + p(s - 2p)z^2 + \left(ps + \frac{3}{4}\right)z + 1 = 0 .$$

C'est de cette équation du quatrième degré que dépendent les quatre points, autres que A B C H H_1, d'intersections des cubiques I et II.