Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CUBIQUES D'EDOUARD LUCAS
Autor: Turrière, E.
Kapitel: Sur certaines coniques à axes parallèles
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28591

3^{me} *groupe:* Points où la tangente passe par O:

$$\begin{array}{cccc} A' & B' & C' & K \\ \rho + \omega_1 & \rho + \omega_2 & \rho + \omega_3 & \rho\,. \end{array}$$

4^{me} *groupe:* Les milieux des hauteurs $(-\rho + \omega_1, -\rho + \omega_2, -\rho + \omega_3)$ et le centre du cercle circonscrit $O(-\rho)$; les tangentes rencontrent en ces points la cubique au point (3ρ).

Les cubiques I *et* III *sont homothétiques par rapport au centre de gravité* G *dans le rapport* $-\frac{1}{2}$. C'est ce qui résulte de ce que dans cette homothétie les 9 points

$$A \quad B \quad C \quad H \quad G \quad G' \quad G'' \quad G''' \quad H_1$$

de la première cubique deviennent respectivement 9 points

$$A' \quad B' \quad C' \quad O \quad G \quad A \quad B \quad C \quad H$$

de la troisième. D'ailleurs les formules de correspondance entre les coordonnées de deux points homologues de cette homothétie

$$\begin{aligned} \xi &= \eta' + \zeta' - \xi' , \\ \eta &= \zeta' + \xi' - \eta' , \\ \zeta &= \xi' + \eta' - \zeta' , \end{aligned}$$

font bien correspondre à la première cubique $\Sigma\alpha\xi(\eta^2 - \zeta^2) = 0$, la troisième $\Sigma\alpha\xi'(\eta' - \zeta')(\eta' + \zeta' - \xi') = 0$.

La troisième cubique attachée au triangle $G'G''G'''$ *est identique à la première cubique du triangle* ABC.

La troisième cubique du triangle $G'G''G'''$ doit, en effet, passer par $G'G''G'''GABC$, le centre H du cercle circonscrit à $G'G''G'''$ et son orthocentre H_1.

SUR CERTAINES CONIQUES À AXES PARALLÈLES.

14. — *Condition de parallélisme des axes d'une conique circonscrite et d'une conique inscrite.*

Supposons que la conique circonscrite d'équation

$$\frac{l}{\xi} + \frac{m}{\eta} + \frac{n}{\zeta} = 0 ,$$

et la conique inscrite d'équation

$$\sqrt{L\xi} + \sqrt{M\eta} + \sqrt{N\zeta} = 0 ,$$
$$L^2\xi^2 + M^2\eta^2 + N^2\zeta^2 - 2LM\xi\eta - 2MN\eta\zeta - 2NL\zeta\xi = 0 ,$$

aient leurs axes parallèles. Ecrivons que, dans le faisceau ponctuel que ces coniques définissent, se trouve un cercle:

$$\begin{aligned} L^2\xi^2 + M^2\eta^2 + N^2\zeta^2 - 2LM\xi\eta - 2MN\eta\zeta - 2NL\zeta\xi + \\ + \lambda(l\eta\zeta + m\zeta\xi + n\xi\eta) \equiv 2SD(\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2) + \\ + (\xi + \eta + \zeta)(P\xi + Q\eta + R\zeta) ; \end{aligned}$$

$$\alpha = \operatorname{cotg} A , \qquad \beta = \operatorname{cotg} B , \qquad \gamma = \operatorname{cotg} C ;$$

l'élimination des coefficients indéterminés λ, D, P, Q et R conduit à la condition:

$$\begin{vmatrix} l & (M + N)^2 & a^2 \\ m & (N + L)^2 & b^2 \\ n & (L + M)^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Soient $\xi_1\eta_1\zeta_1$ les coordonnées barycentriques du centre C_1 de la conique circonscrite; $\xi_2\eta_2\zeta_2$ celles du centre C_2 de la conique inscrite.

Les relations générales

$$\begin{aligned} \xi_1 &= l(m + n - l) , \quad \text{etc.} \qquad & \xi_2 &= M + N , \\ l &= \xi_1(\eta_1 + \zeta_1 - \xi_1) , \quad \text{etc.} \qquad & L &= \eta_2 + \zeta_2 - \xi_2 , \end{aligned}$$

(à des facteurs près) permettent de mettre la condition ci-dessus sous la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} \xi_1(\eta_1 + \zeta_1 - \xi_1) & \xi_2^2 & a^2 \\ \eta_1(\zeta_1 + \xi_1 - \eta_1) & \eta_2^2 & b^2 \\ \zeta_1(\xi_1 + \eta_1 - \zeta_1) & \zeta_2^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Le centre C_1 de la conique circonscrite étant donné, le centre de la conique inscrite C_2 a pour lieu une conique conjuguée au triangle.

Le centre C_2 *de la conique inscrite étant donné, le centre de la conique circonscrite* C_1 *a pour lieu une conique.* La conique circonscrite *engendre alors un faisceau ponctuel.*

Les points C_1 et C_2 coïncident lorsque leur lieu est la courbe

$$\begin{vmatrix} \xi^2 & \xi & a^2 \\ \eta^2 & \eta & b^2 \\ \zeta^2 & \zeta & c^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\Sigma a^2 \eta\zeta (\eta - \zeta) = 0 :$$

ce qui exprime la propriété suivante:

Le lieu des centres des coniques concentriques, l'une inscrite et l'autre circonscrite, admettant les mêmes axes de symétrie est la troisième cubique de Lucas.

15. — *Condition de parallélisme des axes d'une conique circonscrite et d'une conique conjuguée.* — Soit la conique conjugée d'équation

$$\frac{\xi^2}{\xi_0} + \frac{\eta^2}{\eta_0} + \frac{\zeta^2}{\zeta_0} = 0 ;$$

$\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ sont les coordonnées de son centre C_0. La condition est:

$$\begin{vmatrix} l & \xi_0(\eta_0 + \zeta_0) & a^2 \\ m & \eta_0(\zeta_0 + \xi_0) & b^2 \\ n & \zeta_0(\xi_0 + \eta_0) & c^2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

ou encore en introduisant les coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 du centre C_1 de la conique circonscrite:

$$\begin{vmatrix} \xi_1(\eta_1 + \zeta_1 - \xi_1) & \xi_0(\eta_0 + \zeta_0) & a^2 \\ \eta_1(\zeta_1 + \xi_1 - \eta_1) & \eta_0(\zeta_0 + \xi_0) & b^2 \\ \zeta_1(\xi_1 + \eta_1 - \zeta_1) & \zeta_0(\xi_0 + \eta_0) & c^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Lorsque le centre C_1 *de la conique circonscrite est imposé, le lieu du centre* C_0 *de la conique conjuguée est une conique circonscrite.* La conique conjuguée *appartient à un faisceau ponctuel.*

Lorsque le centre C_0 *de la conique conjuguée est imposé, le lieu* *de* C_1 *est une conique.* La conique circonscrite appartient à *un faisceau ponctuel.*

Lorsque C_1 et C_0 sont confondus, la condition est la même que pour le cas d'une conique inscrite et d'une conique circonscrite coaxiale.

Le lieu des centres communs des coniques, l'une circonscrite, l'autre conjuguée, coaxiales est encore la troisième cubique de Lucas.

16. — *Condition de parallélisme des axes d'une conique inscrite et d'une conique conjuguée.* — Soient $C_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ et $C_2(\eta_2, \eta_2, \zeta_2)$ les centres respectifs de la conique conjuguée et de la conique inscrite associées.

La condition de parallélisme de leurs axes est

$$\begin{vmatrix} \xi_2^2 & \xi_0(\eta_0 + \zeta_0) & a^2 \\ \eta_2^2 & \eta_0(\zeta_0 + \xi_0) & b^2 \\ \zeta_2^2 & \zeta_0(\xi_0 + \eta_0) & c^2 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Quand C_0 *est donné, le lieu de* C_2 *est une conique conjuguée.*

Quand C_2 *est donné, le lieu de* C_0 *est une conique circonscrite et la conique conjuguée* (C_0) *appartient à un faisceau ponctuel.*

Le lieu de C_0 *et* C_2, *lorsque ces points sont confondus, c'est-à-dire dans le cas des coniques concentriques et coaxiales, est encore la troisième cubique de Lucas.*

En résumé, les trois théorèmes obtenus mettent en évidence une nouvelle propriété des points de la troisième cubique de Lucas, propriété qui leur est propre d'ailleurs:

Tout point de la troisième cubique de Lucas est centre d'une conique inscrite, d'une conique circonscrite et d'une conique conjuguée au triangle ayant toutes trois les mêmes axes.

Ces axes sont alors les axes principaux et centraux d'inertie d'un système de trois masses ponctuelles (ξ_0, η_0, ζ_0) *disposées aux sommets du triangle de référence* [1].

---

[1] Cf.: Sur l'équivalence en géométrie des masses. *L'Enseignement mathématique*, t. XXX, 1931, p. 85.

Les résultats précédents introduisent des triangles C_0, C_1, C_2, dont les sommets sont les centres de coniques conjuguée, circonscrite, inscrite à axes parallèles. Ces triangles dépendent de quatre paramètres arbitraires, par rapport au triangle fondamental. Lorsque l'un des sommets est imposé, les deux autres ont pour lieux des coniques Leur étude ne me paraît pas avoir été faite.

Intersection des cubiques.

17. — Les 9 points d'intersection des cubiques II et III sont

$$A \quad B \quad C \quad O \quad H \quad I \quad I' \quad I'' \quad I''' .$$

Les cubiques I et III se touchent en G; les 7 autres points d'intersection sont: A B C H et les points à l'infini des trois hauteurs.

Les cubiques I et II ont en commun

$$A \quad B \quad C \quad H \quad H_1 ;$$

l'équation de la première cubique

$$\left\| \alpha \quad \xi \quad \frac{1}{\xi} \right\| = 0 ,$$

conduit à poser

$$\alpha = \lambda\xi + \frac{\mu}{\xi} .$$

En supposant que ξ, η, ζ soient racines de l'équation cubique

$$\xi^3 - S\xi^2 + Q\xi - P = 0 ,$$

l'identité $\Sigma\,\alpha\beta = 1$ donne tout d'abord :

$$\lambda^2 Q + \lambda\mu \cdot \frac{QS - 3P}{P} + \frac{S}{P}\mu^2 = 1 .$$

Les indéterminées λ et μ vérifient en outre la condition provenant de l'équation de la seconde cubique:

$$\left\| 2\beta\gamma - 1 \quad \xi \quad \frac{\beta + \gamma}{\xi} \right\| = 0 .$$