Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CUBIQUES D'EDOUARD LUCAS
Autor: Turrière, E.
Kapitel: LA TROISIÈME CUBIQUE.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28591

Cette transformation est réciproque et laisse invariante l'équation de la *troisième cubique de Lucas, qui étant le lieu de* Π, *est aussi le lieu du centre de la conique circonscrite.* Le lieu du pied de la quatrième normale issue du point de concours Q comprend les côtés, le cercle circonscrit du triangle ABC et une courbe du septième degré [1].

La troisième cubique.

13. — La cubique $\sum \frac{x}{a}(y^2 - z^2) = 0$,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ x & y & z \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = 0 ,$$

est une cubique invariante dans la transformation isogonale, lieu de points homologues constamment alignés avec le centre de gravité G.

La condition de trois points étant

$$u_1 + u_2 + u_3 = \rho ,$$

voici quelques points de la courbe:

1^er^ groupe: Points où la tangente passe par le point de Lemoine K(ρ)

A	B	C	G
ω_1	ω_2	ω_3	0 .

2^me^ groupe: Points où la tangente passe par G:

I	I′	I″	I‴
$\frac{\rho}{2}$	$\frac{\rho}{2} + \omega_1$	$\frac{\rho}{2} + \omega_2$	$\frac{\rho}{2} + \omega_3$.

1 G. Darboux, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^me^ série, 1866, t. V, p. 95 et 1867; t. VI, p. 510-515 (question 752). Voir aussi 1865, IV, p. 420.

A. Haarbleicher, *De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées*, Paris, Gauthier-Villars, éditeur, 1931, une brochure de 79 pages (la courbe du 7^me^ degré est construite et étudiée aux pages 61 et suivantes).

3^{me} *groupe:* Points où la tangente passe par O:

$$\begin{array}{cccc} A' & B' & C' & K \\ \varphi + \omega_1 & \varphi + \omega_2 & \varphi + \omega_3 & \varphi\,. \end{array}$$

4^{me} *groupe:* Les milieux des hauteurs $(-\varphi + \omega_1, -\varphi + \omega_2, -\varphi + \omega_3)$ et le centre du cercle circonscrit $O(-\varphi)$; les tangentes rencontrent en ces points la cubique au point (3φ).

Les cubiques I *et* III *sont homothétiques par rapport au centre de gravité* G *dans le rapport* $-\frac{1}{2}$. C'est ce qui résulte de ce que dans cette homothétie les 9 points

$$A \quad B \quad C \quad H \quad G \quad G' \quad G'' \quad G''' \quad H_1$$

de la première cubique deviennent respectivement 9 points

$$A' \quad B' \quad C' \quad O \quad G \quad A \quad B \quad C \quad H$$

de la troisième. D'ailleurs les formules de correspondance entre les coordonnées de deux points homologues de cette homothétie

$$\begin{aligned} \xi &= \eta' + \zeta' - \xi'\,, \\ \eta &= \zeta' + \xi' - \eta'\,, \\ \zeta &= \xi' + \eta' - \zeta'\,, \end{aligned}$$

font bien correspondre à la première cubique $\Sigma\alpha\xi(\eta^2 - \zeta^2) = 0$, la troisième $\Sigma\alpha\xi'(\eta' - \zeta')(\eta' + \zeta' - \xi') = 0$.

La troisième cubique attachée au triangle $G'G''G'''$ *est identique à la première cubique du triangle* ABC.

La troisième cubique du triangle $G'G''G'''$ doit, en effet, passer par $G'G''G'''GABC$, le centre H du cercle circonscrit à $G'G''G'''$ et son orthocentre H_1.

Sur certaines coniques à axes parallèles.

14. — *Condition de parallélisme des axes d'une conique circonscrite et d'une conique inscrite.*

Supposons que la conique circonscrite d'équation

$$\frac{l}{\xi} + \frac{m}{\eta} + \frac{n}{\zeta} = 0\,,$$