Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CUBIQUES D'EDOUARD LUCAS

Autor: Turrière, E.

Kapitel: coniques circonscrites a normales concourantes.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28591

de la première cubique, résulte l'équation du lieu du centre de la conique inscrite:

$$\Sigma a^2 \frac{\eta_0 + \zeta_0}{\xi_0} = 0 .$$

Le lieu du centre de la conique inscrite est donc une troisième cubique circonscrite au triangle, dont l'équation est:

$$\sum a^2 \eta\zeta(\eta - \zeta) = 0 ,$$

$$\sum \alpha\xi(\eta - \zeta)(\eta + \zeta - \xi) = 0 ,$$

$$\sum \frac{x}{a}(y^2 - z^2) = 0 .$$

LES CONIQUES CIRCONSCRITES A NORMALES CONCOURANTES.

12. — En coordonnées normales, la condition d'orthogonalité de deux droites

$$z = my , \qquad z = m'y ,$$

issues du sommet A est

$$\underline{1 + mm' + (m + m') \cos A = 0 .}$$

Une conique circonscrite d'équation

$$\frac{\mathcal{A}}{x} + \frac{\mathcal{B}}{y} + \frac{\mathcal{C}}{z} = 0 ,$$

est tangente en A à la droite

$$\mathcal{B}z + \mathcal{C}y = 0 ,$$

et par suite la normale en A a pour équation

$$\frac{z}{y} = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{C}\cos A}{\mathcal{C} - \mathcal{B}\cos A} .$$

La condition de concours des normales en ABC à une même conique circonscrite est donc

$$\frac{\mathcal{B} - \mathcal{C}\cos A}{\mathcal{C} - \mathcal{B}\cos A} \cdot \frac{\mathcal{C} - \mathcal{A}\cos B}{\mathcal{A} - \mathcal{C}\cos B} \cdot \frac{\mathcal{A} - \mathcal{B}\cos C}{\mathcal{B} - \mathcal{A}\cos C} = 1 .$$

Soient x, y, z les coordonnées normales du point Q de concours des normales:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\mathcal{B}}{z + y\cos A} &= \frac{\mathcal{C}}{y + z\cos A}, \\ \frac{\mathcal{C}}{x + z\cos B} &= \frac{\mathcal{A}}{z + x\cos B}, \\ \frac{\mathcal{A}}{y + x\cos C} &= \frac{\mathcal{B}}{x + y\cos C}. \end{aligned}\right.$$

D'où l'équation du lieu de Q:

$$\frac{x + y\cos C}{y + x\cos C} \cdot \frac{y + z\cos A}{z + y\cos A} \cdot \frac{z + x\cos B}{x + z\cos B} = 1 .$$

Le lieu de Q n'est autre que la seconde cubique de Lucas.

Lorsque les normales en A, B, C *à une conique circonscrite à un triangle* ABC *concourent, le lieu du point de concours est la seconde cubique de Lucas.*

La condition entre les coefficients $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ s'obtient facilement par comparaison avec l'équation de la cubique. Il suffit de changer $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$ respectivement en x, y, z, $-\cos A$, $-\cos B$, $-\cos C$. L'équation de la cubique étant

$$\Sigma(\cos B\cos C - \cos A)\, x(y^2 - z^2) = 0 ,$$

la condition est donc

$$\Sigma(\cos B\cos C + \cos A)\, \mathcal{A}(\mathcal{B}^2 - \mathcal{C}^2) = 0 ,$$

$$\Sigma \sin B \sin C \cdot \mathcal{A}(\mathcal{B}^2 - \mathcal{C}^2) = 0 ,$$

$$\sum \frac{\mathcal{A}}{a}(\mathcal{B}^2 - \mathcal{C}^2) = 0 .$$

Posons

$$L = a\mathcal{A} , \quad M = b\mathcal{B} , \quad N = c\mathcal{C} ;$$

l'équation de la conique en coordonnées barycentriques est

$$\frac{L}{\xi} + \frac{M}{\eta} + \frac{N}{\zeta} = 0 ;$$

L, M, N représentent les coordonnées barycentriques d'un point Π qui est le pôle trilinéaire de la droite:

$$\frac{\xi}{L} + \frac{\eta}{M} + \frac{\zeta}{N} = 0 ,$$

de jonction des traces sur les côtés de ABC des tangentes aux sommets opposés. C'est encore le point de concours des droites joignant ABC aux pôles des côtés opposés.

La condition du concours des normales en ABC à la conique

$$\frac{L}{\xi} + \frac{M}{\eta} + \frac{N}{\zeta} = 0$$

devient

$$\Sigma c^2 LM(L - M) = 0 ;$$

sous cette forme, elle exprime que le *point* Π *décrit la troisième cubique de Lucas.*

Les coordonnées barycentriques du centre de la conique

$$\frac{L}{\xi} + \frac{M}{\eta} + \frac{N}{\zeta} = 0 ,$$

sont:

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= L(M + N - L) , \\ \eta &= M(N + L - M) , \\ \zeta &= N(L + M - N) ; \end{aligned} \right.$$

d'où résultent:

$$\frac{\xi(\eta + \zeta - \xi)}{L} = \frac{\eta(\zeta + \xi - \eta)}{M} = \frac{\zeta(\xi + \eta - \zeta)}{N} =$$
$$= (\eta + \zeta - \xi)(\zeta + \xi - \eta)(\xi + \eta - \zeta) .$$

C'est-à-dire que si le centre $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ de la conique est donné, il suffit de prendre pour coefficients

$$\begin{aligned} L &= \xi_0(\eta_0 + \zeta_0 - \xi_0) , \\ M &= \eta_0(\zeta_0 + \xi_0 - \eta_0) , \\ N &= \zeta_0(\xi_0 + \eta_0 - \zeta_0) . \end{aligned}$$

Ces formules établissent donc une transformation quadratique entre le point Π (L, M, N) et le centre de la conique circonscrite.

Cette transformation est réciproque et laisse invariante l'équation de la *troisième cubique de Lucas, qui étant le lieu de* Π, *est aussi le lieu du centre de la conique circonscrite.* Le lieu du pied de la quatrième normale issue du point de concours Q comprend les côtés, le cercle circonscrit du triangle ABC et une courbe du septième degré[1].

LA TROISIÈME CUBIQUE.

13. — La cubique $\sum \frac{x}{a}(y^2 - z^2) = 0$,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ x & y & z \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = 0 \, ,$$

est une cubique invariante dans la transformation isogonale, lieu de points homologues constamment alignés avec le centre de gravité G.

La condition de trois points étant

$$u_1 + u_2 + u_3 = \varrho \, ,$$

voici quelques points de la courbe:

1er groupe: Points où la tangente passe par le point de Lemoine K (ϱ)

A	B	C	G
ω_1	ω_2	ω_3	0 .

2me groupe: Points où la tangente passe par G:

I	I′	I″	I‴
$\frac{\varrho}{2}$	$\frac{\varrho}{2} + \omega_1$	$\frac{\varrho}{2} + \omega_2$	$\frac{\varrho}{2} + \omega_3$.

[1] G. DARBOUX, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2me série, 1866, t. V, p. 95 et 1867; t. VI, p. 510-515 (question 752). Voir aussi 1865, IV, p. 420.

A. HAARBLEICHER, *De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées*, Paris, Gauthier-Villars, éditeur, 1931, une brochure de 79 pages (la courbe du 7me degré est construite et étudiée aux pages 61 et suivantes).