Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CUBIQUES D'EDOUARD LUCAS

Autor: Turrière, E.

Kapitel: seconde cubique de Lucas.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28591

elle rencontre à nouveau la courbe en un point de coordonnées barycentriques

$$\xi = \operatorname{tg} A (\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C - \operatorname{tg}^2 A) \ , \quad \text{etc. ...}$$

Voici la distribution de quelques points remarquables de la première cubique, d'après les points de concours des tangentes et avec l'indication des arguments respectifs dans la représentation elliptique:

1er groupe. Points de contact des tangentes à la cubique issues de l'orthocentre H (ρ).

A	B	C	Φ
ω_1	ω_2	ω_3	0 .

2me groupe. Points de contact des tangentes issues du point Φ (0).

G	G′	G″	G‴
$\frac{\rho}{2}$	$\frac{\rho}{2} + \omega_1$	$\frac{\rho}{2} + \omega_2$	$\frac{\rho}{2} + \omega_3$.

3me groupe. Points de contact des tangentes issues du point ($-\rho$):

H	Φ'	Φ''	Φ'''
ρ	$\rho + \omega_1$	$\rho + \omega_2$	$\rho + \omega_3$.

$\Phi' \Phi'' \Phi'''$ sont les projections de H_1 sur les côtés BC, CA, AB. Les hauteurs de $G' G'' G'''$ sont précisément les droites $G'\Phi'$, $G''\Phi''$ et $G'''\Phi'''$.

La condition d'alignement de trois points sur la cubique est:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \rho \ .$$

LA SECONDE CUBIQUE DE LUCAS.

9. — En coordonnées normales, l'équation de la seconde cubique est:

$$\Sigma (\cos B \cos C - \cos A) x (y^2 - z^2) = 0 \ ;$$

mais comme les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point H_1 (symétrique de H par rapport à O) sont précisément

$$x_1 = \cos B \cos C - \cos A \ , \quad \text{etc.} \dots$$

cette équation

$$\Sigma\, x_1\, x\,(y^2 - z^2) = 0 \ ,$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \\ \dfrac{1}{x} & \dfrac{1}{y} & \dfrac{1}{z} \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

montre que la seconde cubique est une cubique circonscrite à ABC, invariante dans la transformation isogonale, identique au lieu de points inverses dans la transformation isogonale alignés sur H_1.

En coordonnces barycentriques, la seconde cubique a pour équation

$$\begin{vmatrix} 2\beta\gamma - 1 & 2\gamma\alpha - 1 & 2\alpha\beta - 1 \\ \xi & \eta & \zeta \\ \dfrac{\beta + \gamma}{\xi} & \dfrac{\gamma + \alpha}{\eta} & \dfrac{\alpha + \beta}{\zeta} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Cette cubique admet O comme centre de symétrie et point d'inflexion. La tangente inflexionnelle en O:

$$\sum \frac{\cos^2 B - \cos^2 C}{\sin^2 A}\, \xi = 0$$

est la droite OK joignant O et le point K de Lemoine.

Les asymptotes sont les médiatrices du triangle.

La seconde cubique passe par les points A, B, C, O, H, les points I, I′, I″ et I‴ (centres des cercles tritangents), le pivot H_1 et son homologue H_1' dans la transformation isogonale, les milieux A′, B′, C′ des côtés du triangle; les points α, β, γ à l'infini sur les hauteurs, les points A_1, B_1, C_1 diamétralement opposés à A, B, C sur la circonférence circonscrite.

La tangente en H à la seconde cubique, tangente dont l'équation est:

$$\sum \frac{\cos^2 A\,(\cos^2 B - \cos^2 C)}{\sin^2 A}\,\xi = 0\,,$$

passe aussi par le point K de Lemoine.

La condition d'alignement de trois points d'arguments u_1, u_2 et u_3 étant

$$u_1 + u_2 + u_3 = \varrho\,,$$

les points remarquables de la cubique se classent ainsi:

*1*er *groupe.* Quatre points dont les tangentes concourent en $H_1'(\varrho)$:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & H_1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & O\,. \end{array}$$

*2*me *groupe.* Tangentes concourantes en $H_1(O)$:

$$\begin{array}{cccc} I & I' & I'' & I''' \\ \dfrac{\varrho}{2} & \dfrac{\varrho}{2} + \omega_1\,, & \dfrac{\varrho}{2} + \omega_2\,, & \dfrac{\varrho}{2} + \omega_3\,. \end{array}$$

*3*me *groupe.* Tangentes concourantes en O (centre de la courbe et asymptotes):

$$\begin{array}{cccc} O & \alpha & \beta & \gamma \\ \dfrac{\varrho}{3} & \dfrac{\varrho}{3} + \omega_1 & \dfrac{\varrho}{3} + \omega_2 & \dfrac{\varrho}{3} + \omega_3\,. \end{array}$$

*4*me *groupe.* Tangentes concourantes en $(-\varrho)$:

$$\begin{array}{cccc} H_1' & A' & B' & C' \\ \varrho & \varrho + \omega_1 & \varrho + \omega_2 & \varrho + \omega_3\,. \end{array}$$

*5*me *groupe.* Tangentes concourantes en un point $H_1''\left(-\dfrac{\varrho}{3}\right)$ qui est symétrique de H_1' par rapport à O:

$$\begin{array}{cccc} H & A_1 & B_1 & C_1 \\ \dfrac{2\varrho}{3} & \dfrac{2\varrho}{3} + \omega_1 & \dfrac{2\varrho}{3} + \omega_2 & \dfrac{2\varrho}{3} + \omega_3\,. \end{array}$$

10. — La seconde cubique de Lucas est une solution du problème suivant:

Déterminer une cubique circonscrite du type

$$(\mathrm{C}) \equiv \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ lx & my & nz \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

passant par le centre O *du cercle circonscrit et admettant ce point pour point d'inflexion.*

La hessienne de la cubique a pour équation

$$\mathrm{H} \equiv \begin{vmatrix} my - nz & mx - ly & lz - nx \\ mx - ly & nz - lx & ny - mz \\ lz - nx & ny - mz & lx - my \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

soient (x, y, z) les coordonnées du point d'inflexion M imposé d'une manière générale et dans l'un ou l'autre mode de coordonnées. Pour satisfaire à l'équation (C), il suffit de poser

$$l = x - \frac{yz}{\theta}, \qquad m = y - \frac{zx}{\theta}, \qquad n = z - \frac{xy}{\theta},$$

θ étant inconnu. En portant dans l'équation de la hessienne, on obtient

$$\underline{\theta^3 - \theta(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 0 .}$$

[Sous la condition $(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2) \neq 0$ qui exclut les points situés sur les droites invariantes de la transformation quadratique et auxquels correspondent des cubiques décomposables.]

En coordonnées trilinéaires *normales*, le centre O du cercle circonscrit a pour coordonnées

$$x = \cos \mathrm{A}, \qquad y = \cos \mathrm{B}, \qquad z = \cos \mathrm{C} .$$

Posons

$$\cos \mathrm{A} \cdot \cos \mathrm{B} \cdot \cos \mathrm{C} = \varpi \ ;$$

l'équation cubique devient alors

$$\theta^3 - \theta(1 - 2\varpi) - 2\varpi = 0 .$$

A la racine $\theta = 1$, correspondent les expressions suivantes:

$$l = \cos A - \cos B \cos C \ , \quad \text{etc.} \ \ldots$$

de l, m, n; c'est-à-dire précisément la seconde cubique.

Pour un triangle réel, cette solution est simple (elle serait double pour les triangles imaginaires $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ et la solution simple serait $\theta = -2$).

L'équation en θ a deux autres solutions, celles de l'équation quadratique

$$\theta^2 + \theta + 2\varpi = 0 \ .$$

Elles sont réelles, le produit $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ étant toujours inférieur à $\frac{1}{8}$. Si R est le rayon du cercle circonscrit, OH la distance du centre O de ce cercle à l'orthocentre H, les racines ont pour expressions:

$$\theta = -\frac{R \pm OH}{2R} \ ;$$

on a effet, pour le triangle quelconque:

$$\overline{OH}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \ ,$$

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \frac{p^2 - (2R + r)^2}{4R^2} \ .$$

Ces deux dernières racines sont distinctes, sauf pour le triangle équilatéral $\left(\varpi = \frac{1}{8}\right)$.

D'ailleurs l'équation générale

$$\theta^3 - \theta(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 0$$

a pour discriminant Δ (notations des fonctions elliptiques)

$$\Delta = 64[x^6 + y^6 + z^6 - 3x^2y^2z^2 + 3\Sigma x^2(y^2 - z^2)^2] > 0 \ .$$

Les résultats de substitution pour $-\infty$, $-x$, $-y$, $-z$, o, x, y, z ∞, montrent aussi que l'équation en θ a toujours ses racines réelles.

On peut la mettre enfin sous la forme

$$\frac{yz}{\theta x + yz} + \frac{zx}{\theta y + zx} + \frac{xy}{\theta z + xy} = 1 \ ,$$

qui se prête mieux à la discussion.