Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CUBIQUES D'EDOUARD LUCAS

Autor: Turrière, E.

Kapitel: Sur certaines cubiques circonscrites au triangle fondamental.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28591

SUR LES CUBIQUES D'ÉDOUARD LUCAS

PAR

E. TURRIÈRE (Montpellier).

---

1. — A l'occasion de recherches arithmogéométriques [1], j'ai mis en évidence le rôle de cubiques planes qui avaient fait l'objet d'une question proposée en 1876 par Edouard LUCAS et auxquelles j'ai cru devoir donner le nom de cet auteur.

Dans les pages qui suivent, sera exposée une théorie de ces cubiques sous le point de vue de la géométrie du triangle. Ce sont des cubiques générales mais présentant des relations remarquables entre elles et avec les éléments du triangle.

SUR CERTAINES CUBIQUES CIRCONSCRITES AU TRIANGLE FONDAMENTAL.

2. — L'équation générale d'une cubique circonscrite au triangle fondamental est:

$$xy(c_2x - c_1y) + yz(a_3y - a_2z) + zx(b_1z - b_3x) + \mathrm{D}xyz = 0 \ ,$$

avec six constantes arbitraires.

Le point A′ d'intersection avec le côté BC a pour coordonnées $(0, a_2, a_3)$.

La condition de concours des droites AA′, BB′, CC′ est:

$$a_2 b_3 c_1 = a_3 b_1 c_2 \ .$$

---

[1] *L'Enseignement mathématique*, XIXe année, mai 1917: Notions d'arithmogéométrie (3me article), p. 159-191.

Le point de concours Φ de ces trois droites sera, en outre, sur la cubique sous la condition $D = 0$.

Soient $x_1 y_1 z_1$ les coordonnées du point Φ. L'équation de la cubique se met alors sous la forme équivalente:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{p}{x} & \frac{q}{y} & \frac{r}{z} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

La cubique est invariante dans la transformation quadratique:

$$xx' = p , \quad yy' = q , \quad zz' = r$$

les points homologues restant alignés avec le point fixe Φ.

La condition précédente est équivalente à celle du concours des tangentes à la cubique:

$$c_2 y = b_3 z , \quad a_3 z = c_1 x , \quad b_1 x = a_2 y , ,$$

aux sommets A, B, C. Les coordonnées du point de concours Φ' des tangentes sont $\left(\frac{p}{x_1}, \frac{q}{y_1}, \frac{r}{z_1}\right)$; ce point appartient aussi à la cubique et il est l'homologue de Φ dans la transformation quadratique. La tangente en Φ passe par le point Φ': les quatre points A, B, C, Φ sont ainsi les points de contact des tangentes à la cubique menées par Φ'.

3. — *Cubiques circonscrites au triangle fondamental et invariantes dans la transformation isogonale.* — Les cubiques circonscrites au triangle fondamental ABC, invariantes dans la transformation isogonale se divisent en deux familles nettement distinctes:

1° Les cubiques d'équation (en coordonnées trilinéaires)

$$lx(y^2 - z^2) + my(z^2 - x^2) + nz(x^2 - y^2) = 0 ;$$

elles passent par les points doubles I, I′, I″, I‴ de la transformation quadratique.

Les tangentes en A, B et C concourent en un point Φ' de la courbe de coordonnées $\left(\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$.

La cubique est le lieu des points MM' qui, restant homologues dans la transformation isogonale, sont constamment alignés avec un point Φ de la courbe ; les coordonnées du pivot Φ sont (l, m, n).

Les points Φ et Φ' sont homologues.

La tangente en Φ à la courbe passe par Φ'.

Les droites $A\Phi$, $B\Phi$, $C\Phi$ ont pour traces sur les côtés opposés du triangle ABC trois points de la cubique. Les tangentes en ces trois points et au point Φ' concourent en un même point de la courbe.

La courbe passe par les centres I, I', I'', I''' des quatre cercles tritangents aux côtés du triangle, points doubles de la transformation. Les tangentes en ces quatre points concourent sur la cubique.

2° Les cubiques d'équation

$$Ax(y^2 + z^2) + By(z^2 + x^2) + Cz(x^2 + y^2) + Dxyz = 0 .$$

Les tangentes en A, B, C ne sont plus concourantes, mais rencontrent les côtés opposés en trois points alignés, sur la droite d'équation :

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 0 .$$

La cubique est tritangente à la conique circonscrite

$$\frac{1}{Ax} + \frac{1}{By} + \frac{1}{Cz} = 0 ,$$

arguésienne de cette droite.

La cubique ne passe pas par les points doubles de la transformation quadratique.

La cubique n'est pas en général circulaire. Sur toute droite, se trouvent deux points MM' homologues dans la transformation isogonale ; ces points sont déterminés par l'intersection de la droite avec la conique circonscrite transformée arguésienne de la droite.

Les points à l'infini qui se correspondent dans la transformation sont donc les points cycliques. Pour que la cubique soit circulaire, il faut et il suffit que le pivot Φ soit rejeté à l'infini, Φ' venant alors sur la circonférence circonscrite.

4. — *Représentation elliptique d'une cubique circonscrite au triangle, dans le cas du concours des tangentes en* A, B, C.

Considérons une cubique circonscrite, dans le cas

$$a_3 b_1 c_2 = a_2 b_3 c_1 .$$

Les tangentes en A, B, C, et au pivot Φ concourent en un point Φ' de la cubique. Nous prendrons pour arguments de ces points:

A	B	C	Φ	Φ'
ω_1	ω_2	ω_3	0	v

la condition générale de l'alignement de trois points de la cubique sera

$$u_1 + u_2 + u_3 = v .$$

La cubique rencontre les côtés en des points $A'B'C'$ qui seront aussi les traces des droites $A\Phi$, $B\Phi$, $C\Phi$. Leurs arguments seront

$$v + \omega_1 \qquad v + \omega_2 \qquad v + \omega_3 ;$$

les tangentes en ces points $A'B'C'$ et au point Φ' concourent sur la cubique au point d'argument $(- v)$.

Nous pourrons ainsi représenter la cubique par des équations de la forme

$$x = \lambda \frac{\sigma(u - v + \omega_1)}{\sigma(u + \omega_1)} ,$$

$$y = \mu \frac{\sigma(u - v + \omega_2)}{\sigma(u + \omega_2)} ,$$

$$z = \nu \frac{\sigma(u - v + \omega_3)}{\sigma(u + \omega_3)} ,$$

λ, μ, ν étant trois constantes.

La condition d'alignement de deux points u et u' avec le point Φ

$$u + u' = v$$

donne

$$xx' = \lambda^2 , \qquad yy' = \mu^2 , \qquad zz' = \nu^2 .$$

L'alignement sur Φ *exprime donc l'invariance de la cubique dans une transformation quadratique ayant pour points fondamentaux les quatre points* $(\pm \lambda \pm \mu \pm \nu)$.

5. — *Représentation elliptique de la cubique:*

$$lx(y^2 - z^2) + my(z^2 - x^2) + nz(x^2 - y^2) = 0 .$$

Les tangentes aux points ABC et $\Phi(l, m, n)$ concourent en un point Φ' de la cubique. Nous prendrons pour arguments de ces points

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & \Phi & \Phi' \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 & \varphi , \end{array}$$

la condition générale d'alignement de trois points sur la cubique étant

$$u_1 + u_2 + u_3 = \varphi.$$

Nous pouvons poser

$$(\wp u - \wp\varphi)x = \frac{1}{l}\left[\frac{\wp' u}{\wp'\varphi} + \frac{(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)}{(\wp\varphi - e_2)(\wp\varphi - e_3)}\right] ,$$

le second nombre a pour zéros $u = \omega_2, \omega_3, -\varphi$ et $\varphi + \omega_1$.

Pour $u = \varphi$,

$$lx = my = nz ;$$

le point Φ' a pour coordonnées $\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$.

Pour $u = 0$,

$$\frac{lx}{\wp\varphi - e_1} = \frac{my}{\wp\varphi - e_2} = \frac{nz}{\wp\varphi - e_3} ;$$

ce qui conduit à poser:

$$\wp\varphi - e_1 = l^2 , \quad \wp\varphi - e_2 = m^2 , \quad \wp\varphi - e_3 = n^2 ;$$

$$\wp\varphi = \frac{l^2 + m^2 + n^2}{3} , \quad \wp'\varphi = 2lmn , \quad \wp''\varphi = 2(l^2m^2 + m^2n^2 + n^2l^2)$$

$$e_1 = \frac{m^2 + n^2 - 2l^2}{3} , \quad e_2 = \frac{n^2 + l^2 - 2m^2}{3} , \quad e_3 = \frac{l^2 + m^2 - 2n^2}{3}$$

$$e_1 - e_2 = m^2 - l^2 , \quad e_2 - e_3 = n^2 - m^2 , \quad e_3 - e_1 = l^2 - n^2$$

$$\alpha_1 = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = (l^2 - m^2)(l^2 - n^2) , \text{ etc. ...}$$

$$g_2 = \frac{4}{3}[l^4 + m^4 + n^4 - l^2m^2 - m^2n^2 - n^2l^2] ,$$

$$12l^2m^2n^2\,\wp 2\varphi = 3(l^2m^2 + m^2n^2 + n^2l^2)^2 - 8l^2m^2n^2(l^2 + m^2 + n^2) .$$

$$\wp\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}[l^2 + m^2 + n^2 + 3lm + 3mn + 3nl] , \text{ etc. ...}$$

On pourra donc poser finalement:

$$\left\{\begin{aligned} \rho x &= mn\wp' u + 2l(\wp u - e_2)(\wp u - e_3) \ , \\ \rho y &= nl\wp' u + 2m(\wp u - e_3)(\wp u - e_1) \ , \\ \rho z &= lm\wp' u + 2n(\wp u - e_1)(\wp u - e_2) \ . \end{aligned}\right.$$

6. *Formules inverses.*— Connaissant le point (x, y, z) de la cubique circonscrite

$$\Sigma lx(y^2 - z^2) = 0 \ ,$$

proposons-nous de déterminer l'expression de $\wp u$.

Elle résulte de l'équation de la droite de jonction des points u et $-u$. Cette droite passe par le point $\Phi'(v)$. Elle appartient donc à un faisceau de droites; dans l'équation générale de ces droites, le paramètre doit être une fonction paire de u, donc de $\wp u$. De même, les hyperboles équilatères du faisceau défini par I, I', I″ et I‴ coupent la cubique en deux points de paramètres u et $-u$. Le paramètre qui intervient dans l'équation générale de ces hyperboles équilatères est une fonction de $\wp u$.

La droite de jonction de points $(u, -u)$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} lx & 1 & \dfrac{1}{\wp u - e_1} \\ my & 1 & \dfrac{1}{\wp u - e_2} \\ nz & 1 & \dfrac{1}{\wp u - e_3} \end{vmatrix} = 0 \ ,$$

$$\Sigma(e_2 - e_3)\, l(\wp u - e_1)x = 0 \ ,$$
$$\Sigma l(m^2 - n^2)(\wp u - e_1)x = 0 \ ,$$

d'où:

$$3\wp u = \frac{\Sigma l(m^2 - n^2)(m^2 + n^2 - 2l^2)x}{\Sigma l(m^2 - n^2)x} \ .$$

Des équations

$$\rho x = mn\wp' u + 2l(\wp u - e_2)(\wp u - e_3) \ \ldots \text{ etc.} \ ,$$

résulte la combinaison:

$$\rho\Sigma lx(y^2 - z^2) = 0 = 2\Sigma l^2(y^2 - z^2)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3) \ ,$$

$$\sum \frac{\wp v - e_1}{\wp u - e_1}(y^2 - z^2) = 0 \ ;$$

l'équation de l'hyperbole équilatère considérée est :

$$\sum \frac{y^2 - z^2}{\wp u - e_1} = 0 \,,$$

$$\Sigma (e_2 - e_3)(\wp u - e_1) x^2 = 0 \;;$$

d'où

$$3\wp u = \frac{\Sigma (m^2 - n^2)(m^2 + n^2 - 2l^2) x^2}{\Sigma (m^2 - n^2) x^2} \,.$$

---

7. — *Dans le plan du triangle fondamental* ABC *soient trois points fixes* $A_0B_0C_0$; *soient deux points variables* M *et* M_0 *tels que les droites*

AM et A_0M_0	se coupent sur le côté		BC ,
BM et B_0M_0	»	»	CA ,
CM et C_0M_0	»	»	AB ;

les points M *et* M_0 *décrivent deux cubiques circonscrites à* ABC.

Les coordonnées (barycentriques ou normales) étant

a_1	a_2	a_3	pour le point	A_0 ,
b_1	b_2	b_3	»	B_0 ,
c_1	c_2	c_3	»	C_0 ,
ξ	η	ζ	»	M ,
ξ_0	η_0	ζ_0	»	M_0 ,

les conditions

$$\begin{vmatrix} 0 & \eta & \zeta \\ \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \,, \quad \text{etc.}$$

conduisent immédiatement aux équations des lieux cherchés par élimination des coordonnées de l'un ou l'autre des points M et M_0.

La cubique lieu de M a pour équation :

$$\begin{vmatrix} \dfrac{a_3\eta - a_2\zeta}{a_1} & \zeta & -\eta \\ -\zeta & \dfrac{b_1\zeta - b_3\xi}{b_2} & \xi \\ \eta & -\xi & \dfrac{c_2\xi - c_1\eta}{c_3} \end{vmatrix} = 0 \,.$$

La cubique lieu de M_0 a pour équation

$$\frac{a_1\eta_0 - a_2\xi_0}{a_1\zeta_0 - a_3\xi_0} \cdot \frac{b_2\zeta_0 - b_3\eta_0}{b_2\xi_0 - b_1\eta_0} \cdot \frac{c_3\xi_0 - c_1\zeta_0}{c_3\eta_0 - c_2\zeta_0} = 1 \;.$$

Ces cubiques dépendent de six constantes arbitraires (cubique générale circonscrite).

L'absence du terme $\xi\eta\zeta$ se produit pour $a_3 b_1 c_2 = a_2 c_1 b_3$, c'est-à-dire lorsque les droites AA_0, BB_0, CC_0 concourent.

Il en est en particulier ainsi lorsque $A_0 B_0 C_0$ sont les points à l'infini des hauteurs du triangle. On est alors en présence du cas qui fit l'objet de la question posée par Edouard Lucas: on joint les sommets ABC du triangle à un point P de son plan; soient A′, B′, C′ les intersections de ces droites AP, BP, CP avec les côtés opposés. Le lieu de P est défini par la condition que les perpendiculaires aux côtés en A′B′C′ concourent en un point Q.

Le lieu de P est la *première cubique* de Lucas; le point Q associé décrit la *seconde cubique de Lucas*.

Ces cubiques ont donné lieu à quelques exercices relatifs à cette question et à la propriété de concours de normales de coniques circonscrites ou inscrites au triangle fondamental [1].

La première cubique de Lucas.

8. — L'équation de la première cubique en coordonnées barycentriques est

$$\Sigma a^2 \cdot \frac{\eta - \zeta}{\eta + \zeta} = 0 \;;$$

a, b, c, sont les côtés du triangle.

---

[1] Edouard Lucas, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2me série, t. XV, 1876, p. 240; 550-555.

Nouvelle Correspondance mathématique, t. II, 1876, p. 94; IV, 1878, p. 261-272; t. V, 1879, p. 87; VI, 1880, p. 56.

Emile Lemoine, *Association française pour l'avancement des Sciences*, Paris, 1889, p. 21.

G. Papelier, *Leçons sur les coordonnées tangentielles*, 1894, t. I, p. 284.

E. Mosnat, *Problèmes de géométrie analytique*, t. II, 1905, p. 470.

J. Kœhler, *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure*, 1886, t. I, p. 195-197.

Voir aussi la référence relative à une question de G. Darboux et à l'ouvrage de M. A. Haarbleicher indiquée à la suite (paragraphe 12).