

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CUBIQUES D'EDOUARD LUCAS
Autor: Turrière, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28591>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 27.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LES CUBIQUES D'ÉDOUARD LUCAS

PAR

E. TURRIÈRE (Montpellier).

1. — A l'occasion de recherches arithmogéométriques¹, j'ai mis en évidence le rôle de cubiques planes qui avaient fait l'objet d'une question proposée en 1876 par Edouard LUCAS et auxquelles j'ai cru devoir donner le nom de cet auteur.

Dans les pages qui suivent, sera exposée une théorie de ces cubiques sous le point de vue de la géométrie du triangle. Ce sont des cubiques générales mais présentant des relations remarquables entre elles et avec les éléments du triangle.

SUR CERTAINES CUBIQUES CIRCONSCRITES AU TRIANGLE FONDAMENTAL.

2. — L'équation générale d'une cubique circonscrite au triangle fondamental est:

$$xy(c_2x - c_1y) + yz(a_3y - a_2z) + zx(b_1z - b_3x) + Dxyz = 0,$$

avec six constantes arbitraires.

Le point A' d'intersection avec le côté BC a pour coordonnées $(0, a_2, a_3)$.

La condition de concours des droites AA', BB', CC' est:

$$\underline{a_2 b_3 c_1 = a_3 b_1 c_2}.$$

¹ *L'Enseignement mathématique*, XIX^e année, mai 1947: Notions d'arithmogéométrie (3^me article), p. 159-191.

Le point de concours Φ de ces trois droites sera, en outre, sur la cubique sous la condition $D = 0$.

Soient $x_1 y_1 z_1$ les coordonnées du point Φ . L'équation de la cubique se met alors sous la forme équivalente:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{p}{x} & \frac{q}{y} & \frac{r}{z} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

La cubique est invariante dans la transformation quadratique:

$$xx' = p, \quad yy' = q, \quad zz' = r$$

les points homologues restant alignés avec le point fixe Φ .

La condition précédente est équivalente à celle du concours des tangentes à la cubique:

$$c_2 y = b_3 z, \quad a_3 z = c_1 x, \quad b_1 x = a_2 y, \quad ,$$

aux sommets A, B, C. Les coordonnées du point de concours Φ' des tangentes sont $\left(\frac{p}{x_1}, \frac{q}{y_1}, \frac{r}{z_1}\right)$; ce point appartient aussi à la cubique et il est l'homologue de Φ dans la transformation quadratique. La tangente en Φ passe par le point Φ' : les quatre points A, B, C, Φ sont ainsi les points de contact des tangentes à la cubique menées par Φ' .

3. — *Cubiques circonscrites au triangle fondamental et invariante dans la transformation isogonale.* — Les cubiques circonscrites au triangle fondamental ABC, invariantes dans la transformation isogonale se divisent en deux familles nettement distinctes:

1° Les cubiques d'équation (en coordonnées trilineaires)

$$lx(y^2 - z^2) + my(z^2 - x^2) + nz(x^2 - y^2) = 0 ;$$

elles passent par les points doubles I, I', I'', I''' de la transformation quadratique.

Les tangentes en A, B et C concourent en un point Φ' de la courbe de coordonnées $\left(\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right)$.

La cubique est le lieu des points MM' qui, restant homologues dans la transformation isogonale, sont constamment alignés avec un point Φ de la courbe; les coordonnées du pivot Φ sont (l, m, n) .

Les points Φ et Φ' sont homologues.

La tangente en Φ à la courbe passe par Φ' .

Les droites $A\Phi$, $B\Phi$, $C\Phi$ ont pour traces sur les côtés opposés du triangle ABC trois points de la cubique. Les tangentes en ces trois points et au point Φ' concourent en un même point de la courbe.

La courbe passe par les centres I, I', I'', I''' des quatre cercles tritangents aux côtés du triangle, points doubles de la transformation. Les tangentes en ces quatre points concourent sur la cubique.

2° Les cubiques d'équation

$$Ax(y^2 + z^2) + By(z^2 + x^2) + Cz(x^2 + y^2) + Dxyz = 0.$$

Les tangentes en A, B, C ne sont plus concourantes, mais rencontrent les côtés opposés en trois points alignés, sur la droite d'équation:

$$\frac{x}{A} + \frac{y}{B} + \frac{z}{C} = 0.$$

La cubique est tritangente à la conique circonscrite

$$\frac{1}{Ax} + \frac{1}{By} + \frac{1}{Cz} = 0,$$

arguésienne de cette droite.

La cubique ne passe pas par les points doubles de la transformation quadratique.

La cubique n'est pas en général circulaire. Sur toute droite, se trouvent deux points MM' homologues dans la transformation isogonale; ces points sont déterminés par l'intersection de la droite avec la conique circonscrite transformée arguésienne de la droite.

Les points à l'infini qui se correspondent dans la transformation sont donc les points cycliques. Pour que la cubique soit circulaire, il faut et il suffit que le pivot Φ soit rejeté à l'infini, Φ' venant alors sur la circonférence circonscrite.

4. — *Représentation elliptique d'une cubique circonscrite au triangle, dans le cas du concours des tangentes en A, B, C.*

Considérons une cubique circonscrite, dans le cas

$$a_3 b_1 c_2 = a_2 b_3 c_1 .$$

Les tangentes en A, B, C, et au pivot Φ concourent en un point Φ' de la cubique. Nous prendrons pour arguments de ces points :

A	B	C	Φ	Φ'
ω_1	ω_2	ω_3	0	ν

la condition générale de l'alignement de trois points de la cubique sera

$$u_1 + u_2 + u_3 = \nu .$$

La cubique rencontre les côtés en des points $A'B'C'$ qui seront aussi les traces des droites $A\Phi$, $B\Phi$, $C\Phi$. Leurs arguments seront

$$\nu + \omega_1 \quad \nu + \omega_2 \quad \nu + \omega_3 ;$$

les tangentes en ces points $A'B'C'$ et au point Φ' concourent sur la cubique au point d'argument $(-\nu)$.

Nous pourrions ainsi représenter la cubique par des équations de la forme

$$x = \lambda \frac{\sigma(u - \nu + \omega_1)}{\sigma(u + \omega_1)} ,$$

$$y = \mu \frac{\sigma(u - \nu + \omega_2)}{\sigma(u + \omega_2)} ,$$

$$z = \nu \frac{\sigma(u - \nu + \omega_3)}{\sigma(u + \omega_3)} ,$$

λ , μ , ν étant trois constantes.

La condition d'alignement de deux points u et u' avec le point Φ

$$u + u' = \nu$$

donne

$$xx' = \lambda^2 , \quad yy' = \mu^2 , \quad zz' = \nu^2 .$$

L'alignement sur Φ exprime donc l'invariance de la cubique dans une transformation quadratique ayant pour points fondamentaux les quatre points $(\pm \lambda \pm \mu \pm \nu)$.

5. — Représentation elliptique de la cubique :

$$lx(y^2 - z^2) + my(z^2 - x^2) + nz(x^2 - y^2) = 0 .$$

Les tangentes aux points ABC et $\Phi(l, m, n)$ concourent en un point Φ' de la cubique. Nous prendrons pour arguments de ces points

A	B	C	Φ	Φ'
ω_1	ω_2	ω_3	0	φ ,

la condition générale d'alignement de trois points sur la cubique étant

$$u_1 + u_2 + u_3 = \varphi .$$

Nous pouvons poser

$$(pu - p\varphi)x = \frac{1}{l} \left[\frac{p'u}{p'\varphi} + \frac{(pu - e_2)(pu - e_3)}{(p\varphi - e_2)(p\varphi - e_3)} \right] ,$$

le second nombre a pour zéros $u = \omega_2, \omega_3, -\varphi$ et $\varphi + \omega_1$.

Pour $u = \varphi$,

$$lx = my = nz ;$$

le point Φ' a pour coordonnées $\frac{1}{l}, \frac{1}{m}, \frac{1}{n}$.

Pour $u = 0$,

$$\frac{lx}{p\varphi - e_1} = \frac{my}{p\varphi - e_2} = \frac{nz}{p\varphi - e_3} ;$$

ce qui conduit à poser :

$$p\varphi - e_1 = l^2, \quad p\varphi - e_2 = m^2, \quad p\varphi - e_3 = n^2 ;$$

$$p\varphi = \frac{l^2 + m^2 + n^2}{3}, \quad p'\varphi = 2lmn, \quad p''\varphi = 2(l^2m^2 + m^2n^2 + n^2l^2)$$

$$e_1 = \frac{m^2 + n^2 - 2l^2}{3}, \quad e_2 = \frac{n^2 + l^2 - 2m^2}{3}, \quad e_3 = \frac{l^2 + m^2 - 2n^2}{3}$$

$$e_1 - e_2 = m^2 - l^2, \quad e_2 - e_3 = n^2 - m^2, \quad e_3 - e_1 = l^2 - n^2$$

$$\alpha_1 = (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) = (l^2 - m^2)(l^2 - n^2), \quad \text{etc. ...}$$

$$g_2 = \frac{4}{3}[l^4 + m^4 + n^4 - l^2m^2 - m^2n^2 - n^2l^2],$$

$$12l^2m^2n^2 p2\varphi = 3(l^2m^2 + m^2n^2 + n^2l^2)^2 - 8l^2m^2n^2(l^2 + m^2 + n^2) .$$

$$p\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{3}[l^2 + m^2 + n^2 + 3lm + 3mn + 3nl], \quad \text{etc. ...}$$

On pourra donc poser finalement:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho x = mn p' u + 2l(pu - e_2)(pu - e_3) , \\ \rho y = nl p' u + 2m(pu - e_3)(pu - e_1) , \\ \rho z = lm p' u + 2n(pu - e_1)(pu - e_2) . \end{array} \right.$$

6. *Formules inverses.*— Connaissant le point (x, y, z) de la cubique circonscrite

$$\Sigma lx(y^2 - z^2) = 0 ,$$

proposons-nous de déterminer l'expression de pu .

Elle résulte de l'équation de la droite de jonction des points u et $-u$. Cette droite passe par le point $\Phi'(\rho)$. Elle appartient donc à un faisceau de droites; dans l'équation générale de ces droites, le paramètre doit être une fonction paire de u , donc de pu . De même, les hyperboles équilatères du faisceau défini par I, I', I'' et I''' coupent la cubique en deux points de paramètres u et $-u$. Le paramètre qui intervient dans l'équation générale de ces hyperboles équilatères est une fonction de pu .

La droite de jonction de points $(u, -u)$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} lx & 1 & \frac{1}{pu - e_1} \\ my & 1 & \frac{1}{pu - e_2} \\ nz & 1 & \frac{1}{pu - e_3} \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\Sigma(e_2 - e_3) l(pu - e_1)x = 0 ,$$

$$\Sigma l(m^2 - n^2)(pu - e_1)x = 0 ,$$

d'où:

$$3pu = \frac{\Sigma l(m^2 - n^2)(m^2 + n^2 - 2l^2)x}{\Sigma l(m^2 - n^2)x} .$$

Des équations

$$\rho x = mn p' u + 2l(pu - e_2)(pu - e_3) \dots \text{etc.} ,$$

résulte la combinaison:

$$\rho \Sigma lx(y^2 - z^2) = 0 = 2 \Sigma l^2(y^2 - z^2)(pu - e_2)(pu - e_3) ,$$

$$\Sigma \frac{p\rho - e_1}{pu - e_1}(y^2 - z^2) = 0 ;$$

l'équation de l'hyperbole équilatère considérée est :

$$\sum \frac{y^2 - z^2}{p u - e_1} = 0 ,$$

$$\Sigma (e_2 - e_3) (p u - e_1) x^2 = 0 ;$$

d'où

$$3p u = \frac{\Sigma (m^2 - n^2) (m^2 + n^2 - 2l^2) x^2}{\Sigma (m^2 - n^2) x^2} .$$

7. — Dans le plan du triangle fondamental ABC soient trois points fixes $A_0 B_0 C_0$; soient deux points variables M et M_0 tels que les droites

AM et $A_0 M_0$ se coupent sur le côté BC ,
 BM et $B_0 M_0$ » » CA ,
 CM et $C_0 M_0$ » » AB ;

les points M et M_0 décrivent deux cubiques circonscrites à ABC.

Les coordonnées (barycentriques ou normales) étant

a_1	a_2	a_3	pour le point	A_0 ,
b_1	b_2	b_3	»	B_0 ,
c_1	c_2	c_3	»	C_0 ,
ξ	η	ζ	»	M ,
ξ_0	η_0	ζ_0	»	M_0 ,

les conditions

$$\begin{vmatrix} 0 & \eta & \zeta \\ \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0 , \text{ etc.}$$

conduisent immédiatement aux équations des lieux cherchés par élimination des coordonnées de l'un ou l'autre des points M et M_0 .

La cubique lieu de M a pour équation:

$$\begin{vmatrix} \frac{a_3 \eta - a_2 \zeta}{a_1} & \zeta & -\eta \\ -\zeta & \frac{b_1 \zeta - b_3 \xi}{b_2} & \xi \\ \eta & -\xi & \frac{c_2 \xi - c_1 \eta}{c_3} \end{vmatrix} = 0 .$$

La cubique lieu de M_0 a pour équation

$$\frac{a_1 \eta_0 - a_2 \xi_0}{a_1 \zeta_0 - a_3 \xi_0} \cdot \frac{b_2 \zeta_0 - b_3 \eta_0}{b_2 \xi_0 - b_1 \eta_0} \cdot \frac{c_3 \xi_0 - c_1 \zeta_0}{c_3 \eta_0 - c_2 \zeta_0} = 1.$$

Ces cubiques dépendent de six constantes arbitraires (cubique générale circonscrite).

L'absence du terme $\xi\eta\zeta$ se produit pour $a_3 b_1 c_2 = a_2 c_1 b_3$, c'est-à-dire lorsque les droites AA_0 , BB_0 , CC_0 concourent.

Il en est en particulier ainsi lorsque $A_0 B_0 C_0$ sont les points à l'infini des hauteurs du triangle. On est alors en présence du cas qui fit l'objet de la question posée par Edouard LUCAS: on joint les sommets ABC du triangle à un point P de son plan; soient A' , B' , C' les intersections de ces droites AP , BP , CP avec les côtés opposés. Le lieu de P est défini par la condition que les perpendiculaires aux côtés en $A'B'C'$ concourent en un point Q .

Le lieu de P est la *première cubique* de Lucas; le point Q associé décrit la *seconde cubique* de Lucas.

Ces cubiques ont donné lieu à quelques exercices relatifs à cette question et à la propriété de concours de normales de coniques circonscrites ou inscrites au triangle fondamental¹.

LA PREMIÈRE CUBIQUE DE LUCAS.

8. — L'équation de la première cubique en coordonnées barycentriques est

$$\Sigma a^2 \cdot \frac{\eta - \zeta}{\eta + \zeta} = 0;$$

a , b , c , sont les côtés du triangle.

¹ Edouard LUCAS, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^{me} série, t. XV, 1876, p. 240; 550-555.

Nouvelle Correspondance mathématique, t. II, 1876, p. 94; IV, 1878, p. 261-272; t. V, 1879, p. 87; VI, 1880, p. 56.

Emile LEMOINE, *Association française pour l'avancement des Sciences*, Paris, 1889, p. 21.

G. PAPELIER, *Leçons sur les coordonnées tangentielles*, 1894, t. I, p. 284.

E. MOSNAT, *Problèmes de géométrie analytique*, t. II, 1905, p. 470.

J. KÖHLER, *Exercices de géométrie analytique et de géométrie supérieure*, 1886, t. I, p. 195-197.

Voir aussi la référence relative à une question de G. DARBOUX et à l'ouvrage de M. A. HAARBLEICHER indiquée à la suite (paragraphe 12).

En posant

$$\cotg A = \alpha, \quad \cotg B = \beta, \quad \cotg C = \gamma, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1 ;$$

$$a^2 = 2S(\beta + \gamma), \quad b^2 = 2S(\gamma + \alpha), \quad c^2 = 2S(\alpha + \beta),$$

cette équation se met sous la forme:

$$\Sigma \alpha \xi (\eta^2 - \zeta^2) = 0 .$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \xi & \eta & \zeta \\ \frac{1}{\xi} & \frac{1}{\eta} & \frac{1}{\zeta} \end{vmatrix} = 0 .$$

Elle est du type invariant dans la *transformation réciproque*, avec tangentes en A, B, C concourantes en un point $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ qui est le *réciproque* de l'orthocentre H.

La première cubique est le lieu des *points réciproques, associés de telle sorte que leur droite de jonction passe par le point fixe Φ* .

La première cubique passe par les points A, B, C, le centre de gravité G, l'orthocentre H, le pivot Φ , le symétrique H_1 de H par rapport au centre O du cercle circonscrit; par les sommets G', G'', G''' du triangle constitué par les parallèles aux côtés de ABC menées par A, B et C.

Les points G, G', G'', G''' sont les points doubles de la transformation réciproque ($\xi\xi_1 = \eta\eta_1 = \zeta\zeta_1$).

Le point H_1 est situé sur la droite d'Euler, qui est rencontrée par la première cubique en H, G, H_1 .

Ce point H_1 est l'orthocentre du triangle $G'G''G'''$. Il est aussi l'orthocentre du triangle $A_1B_1C_1$ dont les sommets sont diamétralement opposés sur le cercle circonscrit à A, B et C.

H_1 est aussi le centre radical des trois cercles de centres A, B, C et de rayons respectivement égaux aux côtés opposés a, b et c .

On peut prendre pour coordonnées normales de ce point H_1

$$\begin{cases} x = \cos B \cos C - \cos A, \\ y = \cos C \cos A - \cos B, \\ z = \cos A \cos B - \cos C ; \end{cases}$$

et comme coordonnées barycentriques

$$\begin{aligned}\xi &= \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} A, \\ \eta &= \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A - \operatorname{tg} B, \\ \zeta &= \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C;\end{aligned}$$

ses coordonnées barycentriques *absolues* ($\xi + \eta + \zeta = 1$) sont:

$$\xi = 1 - 2\beta\gamma, \quad \eta = 1 - 2\gamma\alpha, \quad \zeta = 1 - 2\alpha\beta; \quad (H_1)$$

les coordonnées absolues de H étant

$$\xi = \beta\gamma, \quad \eta = \gamma\alpha, \quad \zeta = \alpha\beta,$$

et celles du centre O du cercle circonscrit

$$\xi = \frac{1}{2}\alpha(\beta + \gamma), \quad \eta = \frac{1}{2}\beta(\gamma + \alpha), \quad \zeta = \frac{1}{2}\gamma(\alpha + \beta);$$

ces formules mettent bien en évidence ($\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1$) que le milieu de HH_1 n'est autre que O.

Ajoutons que le point H_1 est situé sur l'hyperbole équilatère conjuguée passant par G, I, I', I'', I''' ayant pour centre le point de Steiner:

$$\begin{aligned}\Sigma(b^2 - c^2)\xi^2 &= 0 \quad \text{ou} \quad \Sigma(\beta - \gamma)\xi^2 = 0, \\ \Sigma \frac{y^2 - z^2}{a^2} &= 0,\end{aligned}$$

courbe connue de la géométrie du triangle.

La cubique et cette hyperbole équilatère sont tangentes au centre de gravité G; la tangente est la droite GK de jonction de G et du point K de Lemoine.

La tangente H_1 à la première cubique a pour équation

$$\Sigma\alpha(\beta - \gamma)^2\xi = 0,$$

et passe par le point de Steiner.

La tangente en H

$$\Sigma\alpha^3(\beta^2 - \gamma^2)\xi = 0$$

passe par le point

$$\xi = \frac{1}{\alpha^3} = \operatorname{tg}^3 A, \quad \text{etc.,}$$

elle rencontre à nouveau la courbe en un point de coordonnées barycentriques

$$\xi = \operatorname{tg} A (\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C - \operatorname{tg}^2 A) , \text{ etc. } \dots$$

Voici la distribution de quelques points remarquables de la première cubique, d'après les points de concours des tangentes et avec l'indication des arguments respectifs dans la représentation elliptique:

1^{er} groupe. Points de contact des tangentes à la cubique issues de l'orthocentre $H(\varphi)$.

A	B	C	Φ
ω_1	ω_2	ω_3	0 .

2^{me} groupe. Points de contact des tangentes issues du point $\Phi(0)$.

G	G'	G''	G'''
$\frac{\varphi}{2}$	$\frac{\varphi}{2} + \omega_1$	$\frac{\varphi}{2} + \omega_2$	$\frac{\varphi}{2} + \omega_3$.

3^{me} groupe. Points de contact des tangentes issues du point $(-\varphi)$:

H	Φ'	Φ''	Φ'''
φ	$\varphi + \omega_1$	$\varphi + \omega_2$	$\varphi + \omega_3$.

$\Phi' \Phi'' \Phi'''$ sont les projections de H_1 sur les côtés BC, CA, AB. Les hauteurs de $G'G''G'''$ sont précisément les droites $G'\Phi'$, $G''\Phi''$ et $G'''\Phi'''$.

La condition d'alignement de trois points sur la cubique est:

$$u_1 + u_2 + u_3 = \varphi .$$

LA SECONDE CUBIQUE DE LUCAS.

9. — En coordonnées normales, l'équation de la seconde cubique est:

$$\Sigma (\cos B \cos C - \cos A) x (y^2 - z^2) = 0 ;$$

mais comme les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point H_1 (symétrique de H par rapport à O) sont précisément

$$x_1 = \cos B \cos C - \cos A, \text{ etc. ...}$$

cette équation

$$\Sigma x_1 x (y^2 - z^2) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x & y & z \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = 0,$$

montre que la seconde cubique est une cubique circonscrite à ABC , invariante dans la transformation isogonale, identique au lieu de points inverses dans la transformation isogonale alignés sur H_1 .

En coordonnées barycentriques, la seconde cubique a pour équation

$$\begin{vmatrix} 2\beta\gamma - 1 & 2\gamma\alpha - 1 & 2\alpha\beta - 1 \\ \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\beta + \gamma}{\xi} & \frac{\gamma + \alpha}{\eta} & \frac{\alpha + \beta}{\zeta} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette cubique admet O comme centre de symétrie et point d'inflexion. La tangente inflexionnelle en O :

$$\Sigma \frac{\cos^2 B - \cos^2 C}{\sin^2 A} \xi = 0$$

est la droite OK joignant O et le point K de Lemoine.

Les asymptotes sont les médiatrices du triangle.

La seconde cubique passe par les points A, B, C, O, H , les points I, I', I'' et I''' (centres des cercles tritangents), le pivot H_1 et son homologue H'_1 dans la transformation isogonale, les milieux A', B', C' des côtés du triangle; les points α, β, γ à l'infini sur les hauteurs, les points A_1, B_1, C_1 diamétralement opposés à A, B, C sur la circonférence circonscrite.

La tangente en H à la seconde cubique, tangente dont l'équation est:

$$\sum \frac{\cos^2 A (\cos^2 B - \cos^2 C)}{\sin^2 A} \xi = 0 ,$$

passé aussi par le point K de Lemoine.

La condition d'alignement de trois points d'arguments u_1 , u_2 et u_3 étant

$$u_1 + u_2 + u_3 = \varphi ,$$

les points remarquables de la cubique se classent ainsi:

1^{er} groupe. Quatre points dont les tangentes concourent en $H_1'(\varphi)$:

A	B	C	H_1
ω_1	ω_2	ω_3	O .

2^{me} groupe. Tangentes concourantes en $H_1(O)$:

I	I'	I''	I'''
$\frac{\varphi}{2}$	$\frac{\varphi}{2} + \omega_1$.	$\frac{\varphi}{2} + \omega_2$.	$\frac{\varphi}{2} + \omega_3$.

3^{me} groupe. Tangentes concourantes en O (centre de la courbe et asymptotes):

O	α	β	γ
$\frac{\varphi}{3}$	$\frac{\varphi}{3} + \omega_1$	$\frac{\varphi}{3} + \omega_2$	$\frac{\varphi}{3} + \omega_3$.

4^{me} groupe. Tangentes concourantes en $(-\varphi)$:

H_1'	A'	B'	C'
φ	$\varphi + \omega_1$	$\varphi + \omega_2$	$\varphi + \omega_3$.

5^{me} groupe. Tangentes concourantes en un point $H_1''\left(-\frac{\varphi}{3}\right)$ qui est symétrique de H_1' par rapport à O :

H	A_1	B_1	C_1
$\frac{2\varphi}{3}$	$\frac{2\varphi}{3} + \omega_1$	$\frac{2\varphi}{3} + \omega_2$	$\frac{2\varphi}{3} + \omega_3$.

10. — La seconde cubique de Lucas est une solution du problème suivant :

Déterminer une cubique circonscrite du type

$$(C) \equiv \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 \\ lx & my & nz \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

passant par le centre O du cercle circonscrit et admettant ce point pour point d'inflexion.

La hessienne de la cubique a pour équation

$$H \equiv \begin{vmatrix} my - nz & mx - ly & lz - nx \\ mx - ly & nz - lx & ny - mz \\ lz - nx & ny - mz & lx - my \end{vmatrix} = 0 ;$$

soient (x, y, z) les coordonnées du point d'inflexion M imposé d'une manière générale et dans l'un ou l'autre mode de coordonnées. Pour satisfaire à l'équation (C), il suffit de poser

$$l = x - \frac{yz}{\theta}, \quad m = y - \frac{zx}{\theta}, \quad n = z - \frac{xy}{\theta},$$

θ étant inconnu. En portant dans l'équation de la hessienne, on obtient

$$\theta^3 - \theta(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 0 .$$

[Sous la condition $(x^2 - y^2)(y^2 - z^2)(z^2 - x^2) \neq 0$ qui exclut les points situés sur les droites invariantes de la transformation quadratique et auxquels correspondent des cubiques décomposables.]

En coordonnées trilinéaires *normales*, le centre O du cercle circonscrit a pour coordonnées

$$x = \cos A, \quad y = \cos B, \quad z = \cos C .$$

Posons

$$\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = \varpi ;$$

l'équation cubique devient alors

$$\theta^3 - \theta(1 - 2\varpi) - 2\varpi = 0 .$$

A la racine $\theta = 1$, correspondent les expressions suivantes:

$$l = \cos A - \cos B \cos C, \text{ etc. ...}$$

de l, m, n ; c'est-à-dire précisément la seconde cubique.

Pour un triangle réel, cette solution est simple (elle serait double pour les triangles imaginaires $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ et la solution simple serait $\theta = -2$).

L'équation en θ a deux autres solutions, celles de l'équation quadratique

$$\theta^2 + \theta + 2\varpi = 0.$$

Elles sont réelles, le produit $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C$ étant toujours inférieur à $\frac{1}{8}$. Si R est le rayon du cercle circonscrit, OH la distance du centre O de ce cercle à l'orthocentre H , les racines ont pour expressions:

$$\theta = -\frac{R \pm OH}{2R};$$

on a effet, pour le triangle quelconque:

$$\begin{aligned} \overline{OH}^2 &= 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2); \\ \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C &= \frac{p^2 - (2R + r)^2}{4R^2}. \end{aligned}$$

Ces deux dernières racines sont distinctes, sauf pour le triangle équilatéral ($\varpi = \frac{1}{8}$).

D'ailleurs l'équation générale

$$\theta^3 - \theta(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 0$$

a pour discriminant Δ (notations des fonctions elliptiques)

$$\Delta = 64[x^6 + y^6 + z^6 - 3x^2y^2z^2 + 3\Sigma x^2(y^2 - z^2)^2] > 0.$$

Les résultats de substitution pour $-\infty, -x, -y, -z, 0, x, y, z, \infty$, montrent aussi que l'équation en θ a toujours ses racines réelles.

On peut la mettre enfin sous la forme

$$\frac{yz}{\theta x + yz} + \frac{zx}{\theta y + zx} + \frac{xy}{\theta z + xy} = 1,$$

qui se prête mieux à la discussion.

LES CONIQUES INSCRITES À NORMALES CONCOURANTES.

11. — Considérons les coniques inscrites dans le triangle de référence et telles que les normales aux points de contact soient concourantes. Il est évident que l'on se trouve dans les conditions du problème qui a conduit aux deux premières cubiques, puisque les droites qui joignent les sommets aux points de contact de toute conique inscrite concourent. Le point de Gergonne P décrit la première cubique, tandis que le point de concours Q des normales décrit la seconde.

Soient (x, y, z) les coordonnées de Q; X, Y, Z celles de P (coordonnées normales). Les équations qui conduisent à celles des cubiques sont:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{y + x \cos C} &= \frac{Z}{z + x \cos B} , \\ \frac{Z}{z + y \cos A} &= \frac{X}{x + y \cos C} , \\ \frac{X}{x + z \cos B} &= \frac{Y}{y + z \cos A} . \end{aligned}$$

Soient ξ, η, ζ les coordonnées barycentriques de P. La conique inscrite admettant ce point de Gergonne a pour équation

$$\sqrt{\frac{\xi}{\xi_1}} + \sqrt{\frac{\eta}{\eta_1}} + \sqrt{\frac{\zeta}{\zeta_1}} = 0 ,$$

et les coordonnées de son centre sont:

$$\xi_0 = \xi_1(\eta_1 + \zeta_1) , \text{ etc. ...}$$

ou encore

$$\xi_0 = \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\zeta_1} , \text{ etc. ...}$$

D'où résultent les formules inverses

$$\frac{1}{\xi_1} = \eta_0 + \zeta_0 - \xi_0 , \text{ etc. ...}$$

De l'équation

$$\sum a^2 \frac{\eta_1 - \zeta_1}{\eta_1 + \zeta_1} = 0$$

de la première cubique, résulte l'équation du lieu du centre de la conique inscrite:

$$\sum a^2 \frac{\eta_0 + \zeta_0}{\xi_0} = 0 .$$

Le lieu du centre de la conique inscrite est donc une troisième cubique circonscrite au triangle, dont l'équation est:

$$\sum a^2 \eta \zeta (\eta - \zeta) = 0 ,$$

$$\sum \alpha \xi (\eta - \zeta) (\eta + \zeta - \xi) = 0 ,$$

$$\sum \frac{x}{a} (y^2 - z^2) = 0 .$$

LES CONIQUES CIRCONSCRITES A NORMALES CONCOURANTES.

12. — En coordonnées normales, la condition d'orthogonalité de deux droites

$$z = my , \quad z = m'y ,$$

issues du sommet A est

$$\underline{1 + mm' + (m + m') \cos A = 0 .}$$

Une conique circonscrite d'équation

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{y} + \frac{c}{z} = 0 ,$$

est tangente en A à la droite

$$\beta z + cy = 0 ,$$

et par suite la normale en A a pour équation

$$\frac{z}{y} = \frac{\beta - c \cos A}{c - \beta \cos A} .$$

La condition de concours des normales en ABC à une même conique circonscrite est donc

$$\frac{\beta - c \cos A}{c - \beta \cos A} ; \frac{c - \alpha \cos B}{\alpha - c \cos B} ; \frac{\alpha - \beta \cos C}{\beta - \alpha \cos C} = 1 .$$

Soient x, y, z les coordonnées normales du point Q de concours des normales:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\beta}{z + y \cos A} = \frac{c}{y + z \cos A} , \\ \frac{c}{x + z \cos B} = \frac{\alpha}{z + x \cos B} , \\ \frac{\alpha}{y + x \cos C} = \frac{\beta}{x + y \cos C} . \end{array} \right.$$

D'où l'équation du lieu de Q:

$$\frac{x + y \cos C}{y + x \cos C} \cdot \frac{y + z \cos A}{z + y \cos A} \cdot \frac{z + x \cos B}{x + z \cos B} = 1 .$$

Le lieu de Q n'est autre que la seconde cubique de Lucas.

Lorsque les normales en A, B, C à une conique circonscrite à un triangle ABC concourent, le lieu du point de concours est la seconde cubique de Lucas.

La condition entre les coefficients α, β et c s'obtient facilement par comparaison avec l'équation de la cubique. Il suffit de changer $\alpha, \beta, c, \cos A, \cos B, \cos C$ respectivement en $x, y, z, -\cos A, -\cos B, -\cos C$. L'équation de la cubique étant

$$\Sigma(\cos B \cos C - \cos A) x(y^2 - z^2) = 0 ,$$

la condition est donc

$$\Sigma(\cos B \cos C + \cos A) \alpha (\beta^2 - c^2) = 0 ,$$

$$\Sigma \sin B \sin C \cdot \alpha (\beta^2 - c^2) = 0 ,$$

$$\Sigma \frac{\alpha}{a} (\beta^2 - c^2) = 0 .$$

Posons

$$L = a\alpha , \quad M = b\beta , \quad N = c c ;$$

l'équation de la conique en coordonnées barycentriques est

$$\frac{L}{\xi} + \frac{M}{\eta} + \frac{N}{\zeta} = 0 ;$$

L, M, N représentent les coordonnées barycentriques d'un point Π qui est le pôle trilinéaire de la droite:

$$\frac{\xi}{L} + \frac{\eta}{M} + \frac{\zeta}{N} = 0,$$

de jonction des traces sur les côtés de ABC des tangentes aux sommets opposés. C'est encore le point de concours des droites joignant ABC aux pôles des côtés opposés.

La condition du concours des normales en ABC à la conique

$$\frac{L}{\xi} + \frac{M}{\eta} + \frac{N}{\zeta} = 0$$

devient

$$\underline{\Sigma c^2 LM(L - M) = 0 ;}$$

sous cette forme, elle exprime que le point Π décrit la troisième cubique de Lucas.

Les coordonnées barycentriques du centre de la conique

$$\frac{L}{\xi} + \frac{M}{\eta} + \frac{N}{\zeta} = 0,$$

sont:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = L(M + N - L), \\ \eta = M(N + L - M), \\ \zeta = N(L + M - N); \end{array} \right.$$

d'où résultent:

$$\begin{aligned} \frac{\xi(\eta + \zeta - \xi)}{L} &= \frac{\eta(\zeta + \xi - \eta)}{M} = \frac{\zeta(\xi + \eta - \zeta)}{N} = \\ &= (\eta + \zeta - \xi)(\zeta + \xi - \eta)(\xi + \eta - \zeta). \end{aligned}$$

C'est-à-dire que si le centre $\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ de la conique est donné, il suffit de prendre pour coefficients

$$\begin{aligned} L &= \xi_0(\eta_0 + \zeta_0 - \xi_0), \\ M &= \eta_0(\zeta_0 + \xi_0 - \eta_0), \\ N &= \zeta_0(\xi_0 + \eta_0 - \zeta_0). \end{aligned}$$

Ces formules établissent donc une transformation quadratique entre le point Π (L, M, N) et le centre de la conique circonscrite.

Cette transformation est réciproque et laisse invariante l'équation de la *troisième cubique de Lucas*, qui étant le lieu de Π , est aussi le lieu du centre de la conique circonscrite. Le lieu du pied de la quatrième normale issue du point de concours Q comprend les côtés, le cercle circonscrit du triangle ABC et une courbe du septième degré¹.

LA TROISIÈME CUBIQUE.

13. — La cubique $\sum \frac{x}{a}(y^2 - z^2) = 0$,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ x & y & z \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix} = 0,$$

est une cubique invariante dans la transformation isogonale, lieu de points homologues constamment alignés avec le centre de gravité G .

La condition de trois points étant

$$u_1 + u_2 + u_3 = \varphi,$$

voici quelques points de la courbe:

1^{er} groupe: Points où la tangente passe par le point de Lemoine $K(\varphi)$

A	B	C	G
ω_1	ω_2	ω_3	0 .

2^{me} groupe: Points où la tangente passe par G :

I	I'	I''	I'''
$\frac{\varphi}{2}$	$\frac{\varphi}{2} + \omega_1$	$\frac{\varphi}{2} + \omega_2$	$\frac{\varphi}{2} + \omega_3$.

¹ G. DARBOUX, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2^{me} série, 1866, t. V, p. 95 et 1867; t. VI, p. 510-515 (question 752). Voir aussi 1865, IV, p. 420.

A. HAARBLEICHER, *De l'emploi des droites isotropes comme axes de coordonnées*, Paris, Gauthier-Villars, éditeur, 1931, une brochure de 79 pages (la courbe du 7^{me} degré est construite et étudiée aux pages 61 et suivantes).

3^{me} groupe: Points où la tangente passe par O:

$$\begin{array}{cccc} A' & B' & C' & K \\ \varrho + \omega_1 & \varrho + \omega_2 & \varrho + \omega_3 & \varrho. \end{array}$$

4^{me} groupe: Les milieux des hauteurs ($-\varrho + \omega_1, -\varrho + \omega_2, -\varrho + \omega_3$) et le centre du cercle circonscrit O ($-\varrho$); les tangentes rencontrent en ces points la cubique au point (3ϱ).

Les cubiques I et III sont homothétiques par rapport au centre de gravité G dans le rapport $-\frac{1}{2}$. C'est ce qui résulte de ce que dans cette homothétie les 9 points

$$A \quad B \quad C \quad H \quad G \quad G' \quad G'' \quad G''' \quad H_1$$

de la première cubique deviennent respectivement 9 points

$$A' \quad B' \quad C' \quad O \quad G \quad A \quad B \quad C \quad H$$

de la troisième. D'ailleurs les formules de correspondance entre les coordonnées de deux points homologues de cette homothétie

$$\begin{aligned} \xi &= \eta' + \zeta' - \xi', \\ \eta &= \zeta' + \xi' - \eta', \\ \zeta &= \xi' + \eta' - \zeta', \end{aligned}$$

font bien correspondre à la première cubique $\Sigma \alpha \xi (\eta^2 - \zeta^2) = 0$, la troisième $\Sigma \alpha \xi' (\eta' - \zeta') (\eta' + \zeta' - \xi') = 0$.

La troisième cubique attachée au triangle $G'G''G'''$ est identique à la première cubique du triangle ABC.

La troisième cubique du triangle $G'G''G'''$ doit, en effet, passer par $G'G''G'''GABC$, le centre H du cercle circonscrit à $G'G''G'''$ et son orthocentre H_1 .

SUR CERTAINES CONIQUES À AXES PARALLÈLES.

14. — Condition de parallélisme des axes d'une conique circonscrite et d'une conique inscrite.

Supposons que la conique circonscrite d'équation

$$\frac{l}{\xi} + \frac{m}{\eta} + \frac{n}{\zeta} = 0,$$

et la conique inscrite d'équation

$$\sqrt{L\xi} + \sqrt{M\eta} + \sqrt{N\zeta} = 0 ,$$

$$L^2\xi^2 + M^2\eta^2 + N^2\zeta^2 - 2LM\xi\eta - 2MN\eta\zeta - 2NL\zeta\xi = 0 ,$$

aient leurs axes parallèles. Ecrivons que, dans le faisceau ponctuel que ces coniques définissent, se trouve un cercle:

$$L^2\xi^2 + M^2\eta^2 + N^2\zeta^2 - 2LM\xi\eta - 2MN\eta\zeta - 2NL\zeta\xi +$$

$$+ \lambda(l\eta\zeta + m\zeta\xi + n\xi\eta) \equiv 2SD(\alpha\xi^2 + \beta\eta^2 + \gamma\zeta^2) +$$

$$+ (\xi + \eta + \zeta)(P\xi + Q\eta + R\zeta) ;$$

$$\alpha = \cotg A , \quad \beta = \cotg B , \quad \gamma = \cotg C ;$$

l'élimination des coefficients indéterminés λ , D , P , Q et R conduit à la condition:

$$\begin{vmatrix} l & (M + N)^2 & a^2 \\ m & (N + L)^2 & b^2 \\ n & (L + M)^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Soient $\xi_1\eta_1\zeta_1$ les coordonnées barycentriques du centre C_1 de la conique circonscrite; $\xi_2\eta_2\zeta_2$ celles du centre C_2 de la conique inscrite.

Les relations générales

$$\xi_1 = l(m + n - l) , \quad \text{etc.} \quad \xi_2 = M + N ,$$

$$l = \xi_1(\eta_1 + \zeta_1 - \xi_1) , \quad \text{etc.} \quad L = \eta_2 + \zeta_2 - \xi_2 ,$$

(à des facteurs près) permettent de mettre la condition ci-dessus sous la forme suivante:

$$\begin{vmatrix} \xi_1(\eta_1 + \zeta_1 - \xi_1) & \xi_2^2 & a^2 \\ \eta_1(\zeta_1 + \xi_1 - \eta_1) & \eta_2^2 & b^2 \\ \zeta_1(\xi_1 + \eta_1 - \zeta_1) & \zeta_2^2 & c^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Le centre C_1 de la conique circonscrite étant donné, le centre de la conique inscrite C_2 a pour lieu une conique conjuguée au triangle.

Le centre C_2 de la conique inscrite étant donné, le centre de la conique circonscrite C_1 a pour lieu une conique. La conique circonscrite engendre alors un faisceau ponctuel.

Les points C_1 et C_2 coïncident lorsque leur lieu est la courbe

$$\begin{vmatrix} \xi^2 & \xi & a^2 \\ \eta^2 & \eta & b^2 \\ \zeta^2 & \zeta & c^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

$$\Sigma a^2 \eta \zeta (\eta - \zeta) = 0 :$$

ce qui exprime la propriété suivante:

Le lieu des centres des coniques concentriques, l'une inscrite et l'autre circonscrite, admettant les mêmes axes de symétrie est la troisième cubique de Lucas.

15. — Condition de parallélisme des axes d'une conique circonscrite et d'une conique conjuguée. — Soit la conique conjuguée d'équation

$$\frac{\xi^2}{\xi_0} + \frac{\eta^2}{\eta_0} + \frac{\zeta^2}{\zeta_0} = 0 ;$$

$\xi_0 \eta_0 \zeta_0$ sont les coordonnées de son centre C_0 . La condition est:

$$\begin{vmatrix} l & \xi_0(\eta_0 + \zeta_0) & a^2 \\ m & \eta_0(\zeta_0 + \xi_0) & b^2 \\ n & \zeta_0(\xi_0 + \eta_0) & c^2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

ou encore en introduisant les coordonnées ξ_1, η_1, ζ_1 du centre C_1 de la conique circonscrite:

$$\begin{vmatrix} \xi_1(\eta_1 + \zeta_1 - \xi_1) & \xi_0(\eta_0 + \zeta_0) & a^2 \\ \eta_1(\zeta_1 + \xi_1 - \eta_1) & \eta_0(\zeta_0 + \xi_0) & b^2 \\ \zeta_1(\xi_1 + \eta_1 - \zeta_1) & \zeta_0(\xi_0 + \eta_0) & c^2 \end{vmatrix} = 0 .$$

Lorsque le centre C_1 de la conique circonscrite est imposé, le lieu du centre C_0 de la conique conjuguée est une conique circonscrite. La conique conjuguée appartient à un faisceau ponctuel.

Lorsque le centre C_0 de la conique conjuguée est imposé, le lieu

de C_1 est une conique. La conique circonscrite appartient à un faisceau ponctuel.

Lorsque C_1 et C_0 sont confondus, la condition est la même que pour le cas d'une conique inscrite et d'une conique circonscrite coaxiale.

Le lieu des centres communs des coniques, l'une circonscrite, l'autre conjuguée, coaxiales est encore la troisième cubique de Lucas.

16. — *Condition de parallélisme des axes d'une conique inscrite et d'une conique conjuguée.* — Soient $C_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ et $C_2(\eta_2, \eta_2, \zeta_2)$ les centres respectifs de la conique conjuguée et de la conique inscrite associées.

La condition de parallélisme de leurs axes est

$$\begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_0(\eta_0 + \zeta_0) & a^2 \\ \eta_2^2 & \eta_0(\zeta_0 + \xi_0) & b^2 \\ \zeta_2^2 & \zeta_0(\xi_0 + \eta_0) & c^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Quand C_0 est donné, le lieu de C_2 est une conique conjuguée.

Quand C_2 est donné, le lieu de C_0 est une conique circonscrite et la conique conjuguée (C_0) appartient à un faisceau ponctuel.

Le lieu de C_0 et C_2 , lorsque ces points sont confondus, c'est-à-dire dans le cas des coniques concentriques et coaxiales, est encore la troisième cubique de Lucas.

En résumé, les trois théorèmes obtenus mettent en évidence une nouvelle propriété des points de la troisième cubique de Lucas, propriété qui leur est propre d'ailleurs :

Tout point de la troisième cubique de Lucas est centre d'une conique inscrite, d'une conique circonscrite et d'une conique conjuguée au triangle ayant toutes trois les mêmes axes.

Ces axes sont alors les axes principaux et centraux d'inertie d'un système de trois masses ponctuelles (ξ_0, η_0, ζ_0) disposées aux sommets du triangle de référence¹.

¹ Cf.: Sur l'équivalence en géométrie des masses. *L'Enseignement mathématique*, t. XXX, 1931, p. 85.

Les résultats précédents introduisent des triangles C_0, C_1, C_2 , dont les sommets sont les centres de coniques conjuguée, circonscrite, inscrite à axes parallèles. Ces triangles dépendent de quatre paramètres arbitraires, par rapport au triangle fondamental. Lorsque l'un des sommets est imposé, les deux autres ont pour lieux des coniques. Leur étude ne me paraît pas avoir été faite.

INTERSECTION DES CUBIQUES.

17. — Les 9 points d'intersection des cubiques II et III sont

$$A \quad B \quad C \quad O \quad H \quad I \quad I' \quad I'' \quad I''' .$$

Les cubiques I et III se touchent en G; les 7 autres points d'intersection sont: A B C H et les points à l'infini des trois hauteurs.

Les cubiques I et II ont en commun

$$A \quad B \quad C \quad H \quad H_1 ;$$

l'équation de la première cubique

$$\left\| \begin{array}{ccc} \alpha & \xi & \frac{1}{\xi} \end{array} \right\| = 0 ,$$

conduit à poser

$$\alpha = \lambda \xi + \frac{\mu}{\xi} .$$

En supposant que ξ, η, ζ soient racines de l'équation cubique

$$\xi^3 - S\xi^2 + Q\xi - P = 0 ,$$

l'identité $\Sigma \alpha\beta = 1$ donne tout d'abord :

$$\lambda^2 Q + \lambda \mu \cdot \frac{QS - 3P}{P} + \frac{S}{P} \mu^2 = 1 .$$

Les indéterminées λ et μ vérifient en outre la condition provenant de l'équation de la seconde cubique:

$$\left\| \begin{array}{ccc} 2\beta\gamma - 1 & \xi & \frac{\beta + \gamma}{\xi} \end{array} \right\| = 0 .$$

En y substituant les expressions ci-dessus prises pour α , β , γ cette seconde condition devient, après suppression d'un facteur λ supposé non nul:

$$2(\lambda P - S\mu)^2 = S \cdot P \left[1 + 2\lambda\mu \left(1 - \frac{QS}{P} \right) \right].$$

L'élimination de la variable d'homogénéité entre les deux conditions qui lient μ à λ donne:

$$\mu^2 S^2 + \lambda\mu S(QS - 3P) + \lambda^2 P(2P - QS) = 0,$$

c'est-à-dire par décomposition

$$(\mu S - P\lambda) \cdot [\mu S + (QS - 2P)\lambda] = 0.$$

A la solution

$$\frac{P}{\mu} = \frac{S}{\lambda}$$

correspond

$$\alpha = \xi S + \frac{P}{\xi} = (\xi + \eta)(\xi + \zeta); \text{ etc.},$$

done:

$$\alpha(\eta + \zeta) = \beta(\zeta + \xi) = \gamma(\xi + \eta);$$

c'est le point H_1 de coordonnées absolues $\xi = 1 - 2\beta\gamma$, etc.

18. — A la solution

$$\frac{\lambda}{S} = \frac{\mu}{2P - QS} = \rho$$

correspond

$$\frac{\alpha}{\rho} = S\xi + \frac{2P - QS}{\xi} = \xi^2 - (\eta^2 + \eta\zeta + \zeta^2) - \frac{\eta\zeta}{\xi}(\eta + \zeta),$$

$$\alpha \frac{\xi}{\rho} = (\xi + \eta)(\xi + \zeta)(\xi - \eta - \zeta);$$

si les coordonnées sont absolues, posons:

$$\frac{\alpha\xi(1-\xi)}{1-2\xi} = \frac{\beta\eta(1-\eta)}{1-2\eta} = \frac{\gamma\zeta(1-\zeta)}{1-2\zeta} = \frac{1}{2}pz$$

z étant une inconnue auxiliaire, avec :

$$\alpha + \beta + \gamma = s \quad \Sigma \alpha \beta = 1 \quad \alpha \beta \gamma = p.$$

D'où

$$\alpha \xi^2 - \alpha \xi - \frac{1}{2} p z (2 \xi - 1) = 0$$

et par suite :

$$2 \xi = 1 + \beta \gamma z + \varepsilon \sqrt{1 + \beta^2 \gamma^2 z^2}, \text{ etc.}$$

L'inconnue z est donc racine de l'équation

$$0 = 1 + z + \Sigma \varepsilon \sqrt{1 + \beta^2 \gamma^2 z^2},$$

provenant de la condition

$$\xi + \eta + \zeta = 1.$$

L'élimination des radicaux conduit à une équation admettant la racine triple $z = 0$ et quatre autres racines, solutions de l'équation du quatrième degré suivante :

$$2 p^3 (p - s) z^4 + p^2 (p^2 - 2 p s - 1) z^3 + p (s - 2 p) z^2 + \left(p s + \frac{3}{4} \right) z + 1 = 0.$$

C'est de cette équation du quatrième degré que dépendent les quatre points, autres que A B C H H₁, d'intersections des cubiques I et II.