Une Seconde partie, très brève, a trait aux développements en série. Les propriétés différentielles linéaires de l'exponentielle apparaissent ici comme un trait d'union entre nombre de séries appartenant à des domaines très divers.

Une Troisième partie a trait au comportement asymptotique. Nous y retrouvons les conditions de convergence uniforme selon Abel puis suivant des lemmes plus généraux de Tauber. Ici, les séries interviennent encore abondamment mais l'essentiel est dans les critères intégraux qui les accompagnent. Signalons un aboutissement à une transformation intégrale de Stieltjes, liée, elle-même, au « logarithme intégral ». D'autre part, pour tout ce qui se rapporte à la croissance exponentielle, il est indiqué de rechercher des représentations laplaciennes. Ce n'est que l'extrême richesse de telles réussites qui empêche d'entrer ici dans de plus grands détails.

Une Quatrième partie est consacrée aux équations intégrales, celles-ci étant prises d'abord sous les formes habituelles dues à Volterra, Fredholm, Hilbert, Schmidt, ...; mais l'auteur va commencer par les étudier dans les domaines où elles peuvent être représentées sous des formes laplaciennes. L'idée est remarquablement simple et donne beaucoup de calcul élémentaire là où d'autres ouvrages mettent, tout de suite, du calcul symbolique. D'ailleurs, M. Doetsch aime les schèmes simples tels celui dessiné page 280. Il faut trouver des transformations fonctionnelles avantageuses du compliqué. La transformation de Laplace en est une. Qu'on la prenne pour modèle. On remonte ici jusqu'à l'équation d'Abel et aux dérivées d'indices non entiers. Suivent des théorèmes d'addition *transcendants* qui, par rapport aux théorèmes algébriques, ne sont pas plus étonnants que les nouvelles dérivées par rapport à celles d'indices entiers. Les indices non entiers semblent même pouvoir se généraliser dans le domaine complexe.

La Cinquième partie a trait aux équations différentielles ordinaires ou partielles. C'est ici que se place le fameux Calcul de Heaviside. Nombreuses applications physiques.

Belle œuvre, moderne par sa nature *intégrale* mais d'un intégralisme à transformations et à calculs effectifs. Nous n'avons jamais négligé de dire du bien des théories intégrales en espaces abstraits. Nous n'en sommes que plus à l'aise pour juger, avec enthousiasme, les concrétisations de M. Doetsch.

A. Buhl (Toulouse).

R. Courant und D. Hilbert. — **Methoden der mathematischen Physik.** Zweiter Band (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XLVIII). — Un volume gr. in-8° de XVI-550 pages. Prix: RM. 38 broché, 39,80 relié. J. Springer, Berlin, 1937.

La seconde édition du Tome I de cet ouvrage a été analysée ici (**30**, 1931, p. 165). Le présent Tome II contient des Compléments bibliographiques qui renvoient aux mêmes *Conférences*, de l'Université de Genève, que celles indiquées tout à l'heure à propos du livre de M. G. Doetsch. Relevons même la citation détaillée des noms de MM. Hadamard, Doetsch, Vasilesco, Weinstein, Schauder, Leray. Ainsi *L'Enseignement mathématique* se révèle d'une utilité de premier ordre, puisqu'il complète de grands ouvrages tels celui de MM. Courant et Hilbert, et que d'autre part, il simplifie la tâche de la critique bibliographique puisqu'il n'y a plus qu'à revenir sur des textes analogues à ceux déjà insérés dans notre Revue.

Une courte note nous présente ce volume comme ne dépendant pas essentiellement du précédent. Il se suffit à lui-même quant à l'étude des équations aux dérivées partielles telles qu'on doit les considérer en Physique mathématique. Il fait finalement appel au Calcul des variations et aux problèmes de valeurs propres. Le tout est divisé en sept chapitres.

Le Chapitre I est intitulé: *Vorbereitung. Grundbegriffe.* Il se rapporte aux généralités relatives aux procédés de construction des solutions. Pour les équations en x, y, u, p, q, les points traités pourraient aussi bien commencer un traité de géométrie. Il s'agit d'intégrales complètes, d'enveloppes, d'équations à intégration intuitive. Le point de vue devient plus particulièrement physique lorsqu'il s'agit de déterminer des solutions par des conditions initiales. Pour les solutions analytiques, on remonte jusqu'à Cauchy et Sophie Kowalewski.

Le Chapitre II introduit la notion des *caractéristiques*. Il remonte même, plus loin que Cauchy, jusqu'aux systèmes sous-déterminés de Monge mais son principal objet est indéniablement la théorie de Jacobi-Hamilton qui, des considérations caractéristiques, passe aux considérations *canoniques*. L'équation aux dérivées partielles de Jacobi est alors comprise dans l'ensemble des équations de la Physique; on sait l'importance de cette inclusion pour les développements de la Mécanique ondulatoire.

Le Chapitre III traite des équations linéaires en général. Formes normales: elliptique, hyperbolique, parabolique. On parvient déjà à la construction *matricielle* d'équations et de systèmes tels ceux qui ont prolongé la Théorie de Maxwell dans les voies hardies où se sont engagés Dirac et Louis de Broglie. Les ondes apparaissent planes, cylindriques, sphériques avant d'être des lieux de discontinuité plus quelconques. Les représentations intégrales abondent. L'algorithme laplacien de M. Doetsch se retrouve naturellement lié au Calcul symbolique de Heaviside.

Le Chapitre IV est elliptique et contient la Théorie du potentiel. C'est toujours sur cette dernière théorie que s'essaient les conditions aux limites avant de se transporter, avec généralisation, aux cas elliptiques plus quelconques. A signaler un lemme de F. Rellich sur l'équation de Monge-Ampère du type elliptique, lemme d'après lequel il y a, au plus, deux solutions de l'équation prenant les mêmes valeurs sur une frontière. Les équations intégrales apparaissent également. La littérature se rapporte beaucoup à Picard, Goursat, Poincaré ainsi qu'à la *Potential Theory* de Oliver Dimon Kellogg jadis signalée par nous (**28**, 1929, p. 334) avec des éloges confirmés depuis en maintes directions.

Le Chapitre V est consacré aux équations hyperboliques à deux variables. C'est ici que les caractéristiques jouent un rôle particulièrement décisif comme lignes de discontinuité et qu'apparaissent les méthodes d'intégration de Riemann si bien continuées par G. Darboux, J. Hadamard et M. Emile Picard. Beaucoup de travaux ont donné l'impression que les cas elliptique et hyperbolique relevaient de méthodes entièrement différentes. Aussi convient-il de signaler ici des développements ou, moyennant l'introduction d'imaginaires, on peut passer d'un cas à l'autre et ce non sans élégance.

Le Chapitre VI continue le précédent mais avec un nombre quelconque de variables. J. Hadamard et T. Levi-Civita dominent. On reconnaît, une fois de plus, l'immense importance des notions caractéristiques justement par la facilité relative avec laquelle elles s'étendent dans l'hyperespace.

Il y a une géométrie des caractéristiques assez analogue à la géométrie riemanienne des $ds^2 = g_{ij}\,dx_i\,dx_j$. C'est pourquoi les théories ondulatoires ont toute la puissance des théories métriques les plus générales.

Pour les équations à coefficients constants, la représentation des solutions par intégrales multiples à noyau exponentiel redevient possible. A signaler les méthodes « de descente ». De même les lemmes de moyenne de Leifur Asgeirsson; c'est de la science à symétrie sphérique qui révèle cependant tout un nouveau monde singulier. Des ondes il faut passer au rayonnement. La fameuse surface des ondes de Fresnel, quoique répondant à un problème bien particulier, n'est cependant pas dédaignée. Mais, par contre, des vues sont ouvertes sur des généralisations presque inquiétantes. Quel cerveau les réalisera ?

Le Chapitre VII revient sur les problèmes précédents par les méthodes du Calcul des variations. Il atteint aux théorèmes d'existence de Douglas concernant le problème de Plateau.

L'ensemble donne, à coup sûr, l'impression d'un ouvrage de très haute science, parfois lacunaire comme montrant ce qui manque à côté de ce qui est acquis. Les emprunts à la science française y sont particulièrement à signaler. Les théories en jeu sont physiquement universelles et semblent pouvoir accueillir les contributions venant des formes les plus diverses de l'intelligence mathématique.

A. Buhl (Toulouse).

Vito Volterra et Bohuslav Hostinsky. — **Opérations infinitésimales linéaires. Applications aux Equations différentielles et fonctionnelles** (Collection de Monographies Em. Borel). — Un volume gr. in-8° de VII-238 pages. Prix: 80 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1938.

Bel ouvrage sur le Calcul matriciel poussé jusqu'au Calcul fonctionnel inclusivement. Il s'agit d'un ancien Mémoire de M. Volterra (1887) relatif au Calcul différentiel et intégral des substitutions linéaires, Mémoire qui est maintenant complété et ramifié dans les domaines de la microphysique et du Calcul des Probabilités. C'est surtout là que l'influence de M. Hostinsky se fait sentir.

L'idée a toujours été dans l'air depuis qu'on a considéré les matrices comme les quantités ayant, il est vrai, une multiplication non commutative mais ce n'était pas celle-ci qui pouvait s'opposer à une Analyse convenablement généralisée. Et même, cette non-commutativité, si facile à constater au point de vue algébrique, ne demande qu'à jouer tout aussi élégamment dans le domaine infinitésimal. La différentiation s'applique aisément aux matrices et le calcul matriciel s'applique inversement à nombre d'opérations différentielles d'où des différentiations *à gauche* et *à droite* curieusement symétriques. Seulement — que l'on me permette de donner mon humble avis — ceci n'est plus maintenant aussi original que pourrait le croire quelque jeune néophyte qui ne s'en rapporterait qu'à l'ouvrage de MM. Volterra et Hostinsky. Ces deux illustres savants sont gens de génie; quand ils touchent à une question, ils ont l'air de la renouveler entièrement. Cependant quelques comparaisons avec l'état antérieur des choses, me viennent à l'esprit. Ainsi, pages 78 et 79, à propos de la constitution de différentielles exactes, on trouve tout un symbolisme, sinon identique, du moins analogue à celui de la Théorie des groupes. Il y a même là deux systèmes (5) comparables à ceux de Maurer-Cartan