de la surface, avec une ordonnée ES $= z'''$. Comparons z''' avec z' et avec z'':

$$\mathrm{EJ} = \mathrm{ES} - \mathrm{BQ} = \frac{\partial z}{\partial y} dy = d_y z \ . \tag{4}$$

Les équations (3) et (4) montrent que CC′ et EJ sont deux valeurs consécutives de $\frac{\partial z}{\partial y} dy$, correspondantes à des valeurs de x qui diffèrent entre elles de dx; donc leur différence sera:

$$\mathrm{EJ} - \mathrm{CC'} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) dy\, dx = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} dy\, dx \ . \tag{5}$$

De même,

$$\mathrm{EH} = \mathrm{ES} - \mathrm{CR} = \frac{\partial z}{\partial x} dx = d_x z \ . \tag{6}$$

Les équations (2) et (6) font voir que BB′ et EH sont deux valeurs consécutives de $\frac{\partial z}{\partial x} dx$ correspondantes à des valeurs de y qui diffèrent de dy; ainsi leur différence sera

$$\mathrm{EH} - \mathrm{BB'} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx\, dy = \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} dx\, dy \ . \tag{7}$$

Donc, l'ordre des différentiations successives sera indifférent si

$$\mathrm{EJ} - \mathrm{CC'} = \mathrm{EH} - \mathrm{BB'} \ ,$$

égalité qui devient une identité évidente si nous y remplaçons EJ par son égal EE′ — BB′, et EH par son égal EE′ — CC′.

IV. — Explication géométrique de la méthode d'intégration par parties.

Il s'agit de la formule classique

$$\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} u dv = (uv)_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} - \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} v du \ . \tag{1}$$

Considérons une fonction de deux variables

$$f(u, v) = 0 \tag{2}$$

qui peut être représentée graphiquement par une courbe telle que AB (fig. 4). Soient deux points, M(u_0, v_0) et N(u_1, v_1), sur cette courbe. Nous voulons calculer l'aire comprise entre la portion MN de la courbe, les ordonnées MP et NQ correspon-

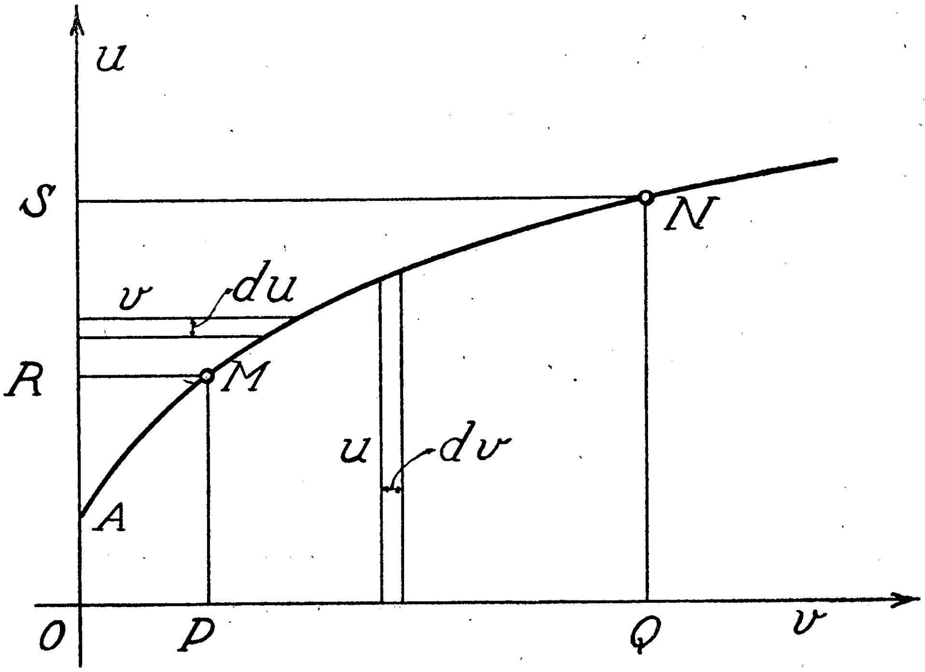

Fig 4

dantes aux points extrêmes et la portion PQ de l'axe des abscisses. Pour cela, il faut résoudre l'équation (2) par rapport à u, exprimant sa valeur en fonction de v, et trouver la valeur de l'intégrale

$$\int u dv$$

entre les limites M et N. Mais il y a des cas dans lesquels il n'est pas facile de réaliser cette intégration, et en revanche il serait facile d'intégrer l'expression

$$\int v du ,$$

où il faudra exprimer v en fonction de u, en tirant sa valeur de l'équation (2). Dans ces cas, il ne sera pas facile de calculer l'aire MNPQ, qui est

$$\text{aire MNPQ} = \int_{M}^{N} u dv$$

(intégrale que nous supposons difficile) mais il sera aisé de trouver l'aire MNRS, parce que

$$\text{aire MNRS} = \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} v\,du$$

(intégrale que nous supposons facile).

D'autre part, les aires des rectangles SNOQ et RMOP se déterminent facilement: elles sont égales respectivement à $u_0 v_0$ et à $u_1 v_1$.

Or, connaissant les aires SNOQ, RMOP et MNRS, nous pouvons en déduire l'aire MNPQ, car

$$\text{aire MNPQ} = \text{aire SNOQ} - \text{aire RMOP} - \text{aire MNRS}$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} u\,dv = u_1 v_1 - u_0 v_0 - \int_{\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} v\,du\ ,$$

qui est précisément la formule (1).

V. — Signification géométrique de la constante d'Euler.

La constante d'Euler,

$$\mathrm{C} = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \log \text{nép}\, n\right]_{n \to \infty}$$

qui établit une relation simple entre $\sum_{m=1}^{m=n} \frac{1}{m}$ et log nép n quand $n \longrightarrow \infty$, a sa raison d'être dans cette circonstance que le terme général de la série est $1/m$ tandis que la dérivée de log nép x est $1/x$. Construisons, comme le montre la figure 5, une succession de rectangles de base égale à l'unité, et de hauteurs égales à $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ Ces rectangles seront compris entre les ordonnées successives tirées par les points d'abscisses égales à 1, 2, 3,