

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	37 (1938)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	 SUR QUELQUES APPELS A L'INTUITION GÉOMÉTRIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE
<b>Autor:</b>	de Losada y Puga, Cristóbal
<b>Kapitel:</b>	III. – DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-28587">https://doi.org/10.5169/seals-28587</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 19.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

En multipliant membre à membre les équations (2) et (3), et en supprimant le facteur  $A'B$  dans les deux membres, on obtient

$$d_2 b = A''A' = a \frac{\sin C}{\sin^2(B+C)} dB.$$

Si maintenant nous considérons la petite variation  $dC$  qui modifie la valeur de l'angle  $C$ , le triangle  $ABC$ , premièrement changé en  $A'BC'$  par la variation  $da$ , et après en  $A''BC'$  par la variation  $dB$ , sera finalement changé en  $A'''BC'$ . Calculons l'excès  $d_3 b$  de la valeur finale,  $A'''C'$ , du côté  $b$  sur sa deuxième valeur intermédiaire  $A''C'$ . Du point  $C'$  comme centre, avec  $A''C'$  comme rayon, décrivons l'arc de circonférence  $A''H$ , dont la longueur est, à d'infiniment petits près,

$$A''H = b \cdot dC = a \frac{\sin B}{\sin(B+C)} dC.$$

Mais, l'arc  $A''H$  étant infiniment petit, le triangle  $A'''A''H$  peut être considéré comme un triangle rectiligne, rectangle en  $H$ , et on aura, à d'infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$d_3 b = A'''H = A''H \cotang A''A'''H = -a \frac{\sin B \cdot \cos(B+C)}{\sin^2(B+C)} dC,$$

car on a

$$\cotang A''A'''H = -\cotang(B + dB + C + dC).$$

La somme des trois valeurs  $d_1 b$ ,  $d_2 b$ ,  $d_3 b$ , nous donne finalement l'expression cherchée de  $db$ .

### III. — DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Il s'agit de faire voir par des considérations géométriques (ceci étant déjà démontré analytiquement), que dans le calcul des dérivées partielles d'ordre supérieur d'une fonction de plusieurs variables, on peut intervertir l'ordre des dérivations.

Soit une fonction de deux variables

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

et A un point quelconque de la surface représentative de cette fonction, dont l'ordonnée  $z$  est AP (fig. 3). Si nous donnons à  $x$  un accroissement  $dx = PQ$ , nous aurons un nouveau point B de la surface et une nouvelle ordonnée BQ. Or, BB', différence des deux ordonnées, provenant d'avoir donné un accroissement à  $x$  seulement, sera

$$BB' = z' - z = \frac{\partial z}{\partial x} dx = d_x z . \quad (2)$$

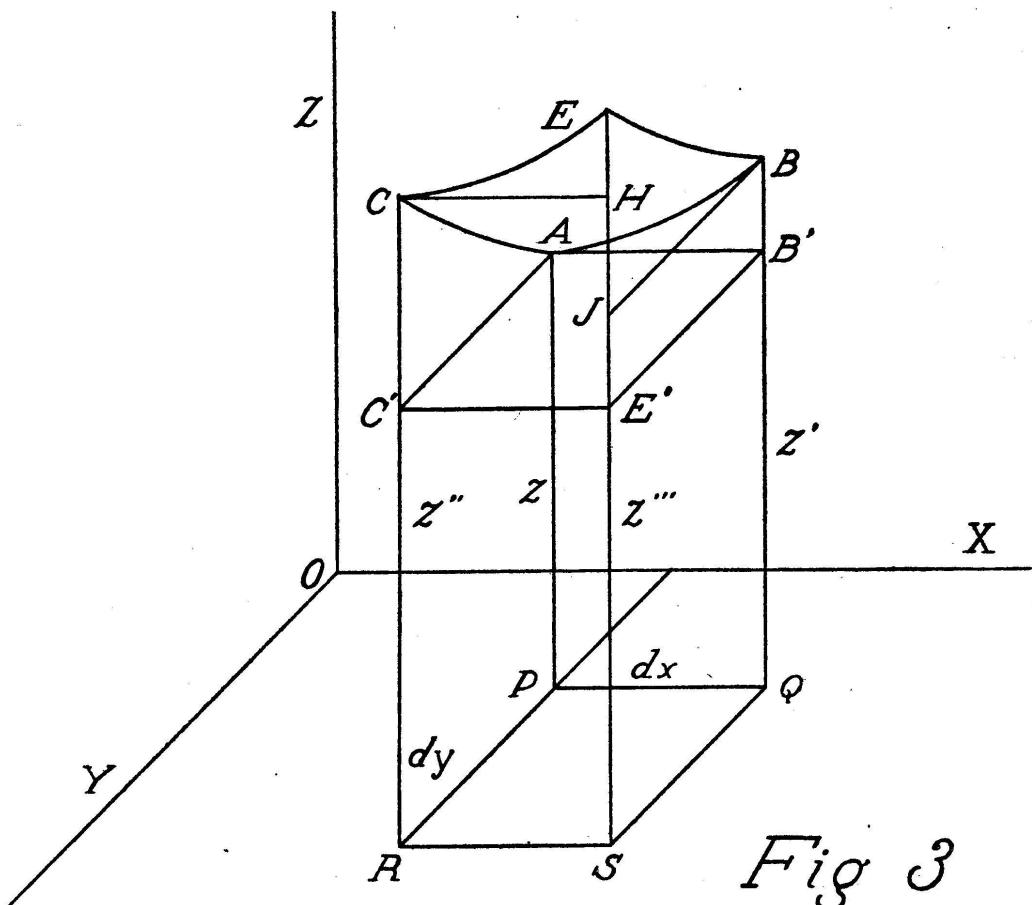


Fig 3

Partons encore une fois du point P, donnons seulement à  $y$  un accroissement infiniment petit  $dy = PR$ , et nous aurons un nouveau point C de la surface, auquel correspondra une ordonnée  $z'' = CR$ . La différence des ordonnées  $z$  et  $z''$  sera de manière analogue

$$CC' = z'' - z = \frac{\partial z}{\partial y} dy = d_y z . \quad (3)$$

Finalement, à partir du point R ( $x, y + dy$ ), donnons à  $x$  un accroissement  $dx$ ; nous obtiendrons ainsi un nouveau point E

de la surface, avec une ordonnée  $ES = z'''$ . Comparons  $z'''$  avec  $z'$  et avec  $z''$ :

$$EJ = ES - BQ = \frac{\partial z}{\partial y} dy = d_y z . \quad (4)$$

Les équations (3) et (4) montrent que  $CC'$  et  $EJ$  sont deux valeurs consécutives de  $\frac{\partial z}{\partial y} dy$ , correspondantes à des valeurs de  $x$  qui diffèrent entre elles de  $dx$ ; donc leur différence sera:

$$EJ - CC' = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy dx = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy dx . \quad (5)$$

De même,

$$EH = ES - CR = \frac{\partial z}{\partial x} dx = d_x z . \quad (6)$$

Les équations (2) et (6) font voir que  $BB'$  et  $EH$  sont deux valeurs consécutives de  $\frac{\partial z}{\partial x} dx$  correspondantes à des valeurs de  $y$  qui diffèrent de  $dy$ ; ainsi leur différence sera

$$EH - BB' = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx dy = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} dx dy . \quad (7)$$

Donc, l'ordre des différentiations successives sera indifférent si

$$EJ - CC' = EH - BB' ,$$

égalité qui devient une identité évidente si nous y remplaçons  $EJ$  par son égal  $EE' - BB'$ , et  $EH$  par son égal  $EE' - CC'$ .

#### IV. — EXPLICATION GÉOMÉTRIQUE DE LA MÉTHODE D'INTÉGRATION PAR PARTIES.

Il s'agit de la formule classique

$$\int_M^N u dv = (uv)_M^N - \int_M^N v du . \quad (1)$$

Considérons une fonction de deux variables

$$f(u, v) = 0 \quad (2)$$