Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES APPELS A L'INTUITION GÉOMÉTRIQUE DANS

L'ENSEIGNEMENT DE L'ANALYSE

Autor: de Losada y Puga, Cristóbal

Kapitel: II. — Relations différentielles dans le triangle.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28587

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

d'où

$$OQ = \frac{OC \cdot OP}{OM} = \frac{\alpha \cdot \alpha^2}{1} = \alpha^3$$
,

c'est-à-dire un infiniment petit du troisième ordre.

Nous pouvons tirer la droite MQ, mener la parallèle par C à cette droite et obtenir un infiniment petit du quatrième ordre, et ainsi de suite.

II. — RELATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS LE TRIANGLE.

Soit le triangle ABC (fig. 2), dans lequel

$$b = a \frac{\sin B}{\sin (B + C)}.$$

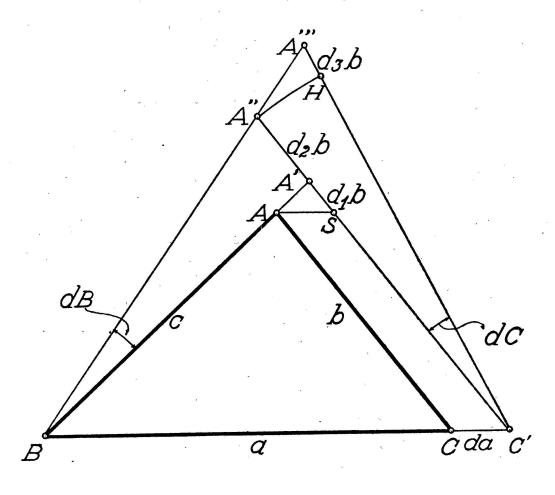


Fig 2

Si on donne aux éléments supposés connus de petites variations da, dB, dC que nous supposerons positives (c'est-à-dire qui font

augmenter la valeur de ces éléments), l'élément inconnu b recevra aussi une petite variation et au lieu de la longueur CA, nous obtiendrons la longueur C'A''', dont l'excès sur CA sera donné par la formule

$$\begin{split} db &= da \frac{\sin \mathbf{B}}{\sin \left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right)} + a \frac{\sin \left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right) \cos \mathbf{B} - \sin \mathbf{B} \cdot \cos \left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right)}{\sin^2 \left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right)} \, d\mathbf{B} \\ &- a \frac{\sin \mathbf{B} \cdot \cos \left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right)}{\sin^2 \left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right)} \, d\mathbf{C} = \\ &= da \frac{\sin \mathbf{B}}{\sin \left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right)} + a \frac{\sin \mathbf{C}}{\sin^2 \left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right)} \, d\mathbf{B} - a \frac{\sin \mathbf{B} \cdot \cos \left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right)}{\sin^2 \left(\mathbf{B} + \mathbf{C}\right)} \, d\mathbf{C} \ , \end{split}$$

qui s'obtient par différentiation de l'équation (1), et qui peut être retrouvée géométriquement comme nous allons le voir.

La petite variation da ou CC' subie par la longueur du côté a, change le triangle ABC en A'BC'. Menons par A la parallèle AS à BC, et nous aurons SC' = AC, de sorte que A'S = d_1b est l'excès de AC' sur AC. Mais le triangle A'AS, semblable au triangle ABC, nous donne

$$d_1 b = da \frac{\sin B}{\sin (B + C)} .$$

La petite variation dB dans la valeur de l'angle B change le triangle, transformé déjà en A'BC' par la petite variation de la longueur de la base, en A"BC', ce qui ajoute à la longueur de b = A'C le petit accroissement $A''A' = d_2b$. Le triangle A"A'B nous donne

$$\frac{A''A'}{dB} = \frac{A'B}{\sin BA''C'} = \frac{A'B}{\sin (B+C)}, \qquad (2)$$

parce que

$$BA''C' = \pi - B - dB - C$$
,

où nous pouvons négliger le terme dB.

De même, le triangle A'BC' nous donne, en négligeant les infiniment petits,

$$\frac{A'B}{\sin C} = \frac{a}{\sin (B + C)} . \tag{3}$$

En multipliant membre à membre les équations (2) et (3), et en supprimant le facteur A'B dans les deux membres, on obtient

$$d_2 b = A''A' = a \frac{\sin C}{\sin^2 (B + C)} dB$$
.

Si maintenant nous considérons la petite variation dC qui modifie la valeur de l'angle C, le triangle ABC, premièrement changé en A'BC' par la variation da, et après en A"BC' par la variation dB, sera finalement changé en A'"BC'. Calculons l'excès d_3b de la valeur finale, A'"C', du côté b sur sa deuxième valeur intermédiaire A"C'. Du point C' comme centre, avec A''C' comme rayon, décrivons l'arc de circonférence A"H, dont la longueur est, à d'infiniment petits près,

$$A''H = b \cdot dC = a \frac{\sin B}{\sin (B + C)} dC.$$

Mais, l'arc A"H étant infiniment petit, le triangle A'"A"H peut être considéré comme un triangle rectiligne, rectangle en H, et on aura, à d'infiniment petits d'ordre supérieur près,

$$d_{3}\,b\,=\,\mathbf{A'''}\,\mathbf{H}\,=\,\mathbf{A'''}\,\mathbf{H}\,\cot\mathrm{ang}\,\mathbf{A'''}\,\mathbf{H}\,=\,-\,a\,\frac{\sin\,\mathbf{B}\,\cdot\,\cos\,\left(\mathbf{B}\,+\,\mathbf{C}\right)}{\sin^{2}\left(\mathbf{B}\,+\,\mathbf{C}\right)}\,d\mathbf{C}\,\,,$$

car on a

$$\cot A''A'''H = -\cot AB + C + dC$$
.

La somme des trois valeurs d_1b , d_2b , d_3b , nous donne finalement l'expression cherchée de db.

III. — DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR.

Il s'agit de faire voir par des considérations géométriques (ceci étant déjà démontré analytiquement), que dans le calcul des dérivées partielles d'ordre supérieur d'une fonction de plusieurs variables, on peut intervertir l'ordre des dérivations.

Soit une fonction de deux variables

$$z = f(x, y)$$