Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CERCLES FOCAUX DES CONIQUES

Autor: Lebesgue, Henri

Kapitel: 9. – Propriétés diverses.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28584

Le cercle de diamètre MT considéré au § 4 se réduit pour le cas de l'asymptote, M étant à l'infini, à la perpendiculaire en T à OT. Comme ce cercle est orthogonal à Γ, cette perpendiculaire est ΩT. (Si l'on remarque que les pieds des normales abaissées de Ω sur l'hyperbole sont les points de rencontre de cette hyperbole et de D, on reconnaît là une propriété connue que nous démontrons incidemment.)

L'axe radical Δ de Γ et Γ_0 étant équidistant des droites directrices D et Ox coupe l'asymptote au milieu Δ_0 de OT. Donc les symétriques S et S′ de s et s' par rapport à Δ_0 sont sur Γ et nous avons cet énoncé, dû à M. H. Mirabel *(loc. cit.)* : *les cercles focaux d'une hyperbole ayant leurs centres sur l'axe non focal découpent sur les asymptotes des segments de longueur* $2a$.

Le cercle Γ appartient au faisceau défini par H et par le cercle γ réduit au point F; H et F sont les deux cercles points de ce faisceau, donc sont deux points inverses par rapport à Γ et le rayon R de celui-ci est donné par:

$$R^2 = \overline{\Omega H} \cdot \overline{\Omega F} = \overline{\Omega F}^2 \cdot \frac{Od_0}{OF} = \overline{\Omega F}^2 \cdot \frac{\overline{Os}^2}{\overline{OF}^2} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \overline{\Omega F}^2 .$$

Ainsi, *les cercles focaux considérés sont vus du foyer sous un angle constant, égal au supplément de l'angle des asymptotes.* Cette seconde forme, qui découle tout de suite des formules (19), permettrait d'obtenir autrement l'énoncé de M. Mirabel.

9. — Propriétés diverses.

Il est clair que des énoncés comme ceux du numéro précédent permettent de construire des problèmes intéressants; on a vu aussi qu'en étudiant les cercles focaux on rencontrait de nouvelles démonstrations des propriétés classiques. Il resterait à indiquer des généralisations des propriétés des foyers aux cercles focaux assez simples pour qu'elles puissent servir à mieux faire comprendre ces propriétés et leurs démonstrations; il me semble que, si l'on veut rester vraiment élémentaire, le choix est bien plus limité.

Naturellement, de la propriété exprimée par (7), résultent les généralisations de la formule $\pm$ MF $\pm$ MF$'$ $= 2a$, à deux ou plus de deux cercles focaux de la même série; je n'insiste pas et je passe aux propriétés angulaires.

Soit une droite Λ coupant la conique $\mathcal{C}$ en M et M$'$ et en K la droite directrice d associée au cercle γ de centre ω. Le cercle auxiliaire Z du § 3 qui passe par M et M$'$, appartenant au faisceau K, γ, admet pour polaire de K la polaire de K par rapport à γ, c'est-à-dire la perpendiculaire à ωK au point k inverse de K par rapport à γ. Cette perpendiculaire kP coupant MM$'$ au point conjugué harmonique de K, *la droite* ωkK *est l'une des bissectrices de l'angle des droites* kM, kM$'$ *joignant aux points* M *et* M$'$ *où la droite* Λ *coupe* $\mathcal{C}$, *l'inverse* k *par rapport à* γ *du point* K *où* Λ *coupe la droite directrice* d.

Par K, faisons passer une autre sécante λ coupant $\mathcal{C}$ en m et m', kP passera aussi par le conjugué harmonique de K par rapport à m et m'; donc kP contient le point de rencontre de mm' et de MM$'$. Soit P ce point. Faisons tendre maintenant λ vers Λ:

Si MM$'$ *coupe la droite directrice* d *de* γ *en* K, *et si* k *est l'inverse de* K *par rapport à* γ, *les deux bissectrices de l'angle* MkM$'$ *sont la droite* ωkK *et la droite* kP, P *étant le point de rencontre des tangentes à* $\mathcal{C}$ *en* M *et* M$'$.

C'est une généralisation du premier théorème de Poncelet. Si, au contraire, nous avions fait varier Λ de façon que M reste fixe et que M$'$ tende vers M, nous aurions obtenu une nouvelle démonstration de l'existence de la tangente en M et prouvé que *cette tangente* MT *est telle que, du point* t *inverse par rapport à* γ *du point* T *de cette tangente située sur* d, *on voie* MT *sous un angle droit.*

En d'autres termes, T *est le pôle par rapport à* γ *de la droite* pM *joignant* M *au pôle* p *de* d *par rapport à* γ; c'est une autre forme de la propriété déjà obtenue pour la tangente.

On construira donc MT en prenant le point T où la polaire de M par rapport à γ coupe d. Le pied m de cette polaire sur ωM est tel que:

$$\mathrm{M}m \cdot \mathrm{M}\omega = \mathcal{P}(\mathrm{M}, \gamma) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}m = \mathrm{MT} \cos \widehat{\mathrm{TM}\omega},$$

d'où, puisque

$$\mathrm{MT} = \frac{\mathrm{M}d}{\cos\varphi} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}(\mathrm{M}, \gamma)}{k}} \cdot \frac{1}{\cos\varphi},$$

$$\frac{\mathrm{M}\omega \cdot \cos\widehat{\mathrm{TM}\omega}}{\sqrt{|\mathcal{P}(\mathrm{M}, \gamma)|}} = \sqrt{|k|}\cos\varphi .$$

Si M est extérieur à γ, $k > 0$, $\dfrac{\sqrt{\mathcal{P}(\mathrm{M}, \gamma)}}{\mathrm{M}\omega}$ est le cosinus du demi-angle sous lequel de M on voit γ; soit $\cos\alpha(\mathrm{M}, \gamma)$.

Si M est intérieur à γ, $k < 0$, $\dfrac{\sqrt{-\mathcal{P}(\mathrm{M}, \gamma)}}{\mathrm{M}\omega}$ est la tangente du dêmi-angle sous lequel de ω on voit la corde de γ dont M est le milieu; soit $\operatorname{tg}\beta(\mathrm{M}, \gamma)$. On a donc:

$$\left\{\begin{aligned} k > 0\ , &\qquad \frac{\cos\widehat{\mathrm{TM}\omega}}{\cos\alpha(\mathrm{M}, \gamma)} = \sqrt{k}\cos\varphi , \\ k < 0\ , &\qquad \frac{\cos\widehat{\mathrm{TM}\omega}}{\operatorname{tg}\beta(\mathrm{M}, \gamma)} = \sqrt{-k}\cos\varphi . \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Le fait que le premier membre des formules (20) *est, pour* M *fixe sur* $\mathcal{C}$, *le même pour tous les cercles focaux d'une même série est la généralisation à deux tels cercles de la propriété classique: la tangente bissecte les rayons vecteurs.*

10. — Autres méthodes. Cercles focaux des ovales de Descartes.

Ces exemples suffiront à montrer les exercices de généralisation que l'on peut envisager; bien que nos énoncés ne constituent pas les seules généralisations possibles, les cas où l'on obtiendrait des résultats élégants et assez simples pour être utiles à de jeunes élèves paraissent peu nombreux. Il faut noter d'ailleurs que l'exposé actuel se prête mal à la généralisation des propriétés les plus élémentaires des coniques lesquelles résultent, non de la définition que nous avons généralisée par la formule (7), mais de celle-ci: une conique est le lieu du centre M