

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES CERCLES FOCAUX DES CONIQUES  
**Autor:** Lebesgue, Henri  
**Kapitel:** 9. – Propriétés diverses.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28584>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Le cercle de diamètre MT considéré au § 4 se réduit pour le cas de l'asymptote, M étant à l'infini, à la perpendiculaire en T à OT. Comme ce cercle est orthogonal à  $\Gamma$ , cette perpendiculaire est  $\Omega T$ . (Si l'on remarque que les pieds des normales abaissées de  $\Omega$  sur l'hyperbole sont les points de rencontre de cette hyperbole et de D, on reconnaît là une propriété connue que nous démontrons incidemment.)

L'axe radical  $\Delta$  de  $\Gamma$  et  $\Gamma_0$  étant équidistant des droites directrices D et Ox coupe l'asymptote au milieu  $\Delta_0$  de OT. Donc les symétriques S et S' de s et s' par rapport à  $\Delta_0$  sont sur  $\Gamma$  et nous avons cet énoncé, dû à M. H. Mirabel (*loc. cit.*) : *les cercles focaux d'une hyperbole ayant leurs centres sur l'axe non focal découpent sur les asymptotes des segments de longueur 2a.*

Le cercle  $\Gamma$  appartient au faisceau défini par H et par le cercle  $\gamma$  réduit au point F; H et F sont les deux cercles points de ce faisceau, donc sont deux points inverses par rapport à  $\Gamma$  et le rayon R de celui-ci est donné par :

$$R^2 = \overline{\Omega H} \cdot \overline{\Omega F} = \overline{\Omega F}^2 \cdot \frac{Od_0}{OF} = \overline{\Omega F}^2 \cdot \frac{\overline{Os}^2}{\overline{OF}^2} = \frac{a^2}{c^2} \cdot \overline{\Omega F}^2.$$

Ainsi, *les cercles focaux considérés sont vus du foyer sous un angle constant, égal au supplément de l'angle des asymptotes.* Cette seconde forme, qui découle tout de suite des formules (19), permettrait d'obtenir autrement l'énoncé de M. Mirabel.

## 9. — PROPRIÉTÉS DIVERSES.

Il est clair que des énoncés comme ceux du numéro précédent permettent de construire des problèmes intéressants; on a vu aussi qu'en étudiant les cercles focaux on rencontrait de nouvelles démonstrations des propriétés classiques. Il resterait à indiquer des généralisations des propriétés des foyers aux cercles focaux assez simples pour qu'elles puissent servir à mieux faire comprendre ces propriétés et leurs démonstrations; il me semble que, si l'on veut rester vraiment élémentaire, le choix est bien plus limité.

Naturellement, de la propriété exprimée par (7), résultent les généralisations de la formule  $\pm MF \pm MF' = 2a$ , à deux ou plus de deux cercles focaux de la même série; je n'insiste pas et je passe aux propriétés angulaires.

Soit une droite  $\Lambda$  coupant la conique  $\mathcal{C}$  en  $M$  et  $M'$  et en  $K$  la droite directrice  $d$  associée au cercle  $\gamma$  de centre  $\omega$ . Le cercle auxiliaire  $Z$  du § 3 qui passe par  $M$  et  $M'$ , appartenant au faisceau  $K$ ,  $\gamma$ , admet pour polaire de  $K$  la polaire de  $K$  par rapport à  $\gamma$ , c'est-à-dire la perpendiculaire à  $\omega K$  au point  $k$  inverse de  $K$  par rapport à  $\gamma$ . Cette perpendiculaire  $kP$  coupant  $MM'$  au point conjugué harmonique de  $K$ , *la droite  $\omega kK$  est l'une des bissectrices de l'angle des droites  $kM$ ,  $kM'$  joignant aux points  $M$  et  $M'$  où la droite  $\Lambda$  coupe  $\mathcal{C}$ , l'inverse  $k$  par rapport à  $\gamma$  du point  $K$  où  $\Lambda$  coupe la droite directrice  $d$ .*

Par  $K$ , faisons passer une autre sécante  $\lambda$  coupant  $\mathcal{C}$  en  $m$  et  $m'$ ,  $kP$  passera aussi par le conjugué harmonique de  $K$  par rapport à  $m$  et  $m'$ ; donc  $kP$  contient le point de rencontre de  $mm'$  et de  $MM'$ . Soit  $P$  ce point. Faisons tendre maintenant  $\lambda$  vers  $\Lambda$ :

*Si  $MM'$  coupe la droite directrice  $d$  de  $\gamma$  en  $K$ , et si  $k$  est l'inverse de  $K$  par rapport à  $\gamma$ , les deux bissectrices de l'angle  $MkM'$  sont la droite  $\omega kK$  et la droite  $kP$ ,  $P$  étant le point de rencontre des tangentes à  $\mathcal{C}$  en  $M$  et  $M'$ .*

C'est une généralisation du premier théorème de Poncelet. Si, au contraire, nous avions fait varier  $\Lambda$  de façon que  $M$  reste fixe et que  $M'$  tends vers  $M$ , nous aurions obtenu une nouvelle démonstration de l'existence de la tangente en  $M$  et prouvé que *cette tangente  $MT$  est telle que, du point  $t$  inverse par rapport à  $\gamma$  du point  $T$  de cette tangente située sur  $d$ , on voie  $MT$  sous un angle droit.*

En d'autres termes, *T est le pôle par rapport à  $\gamma$  de la droite  $pM$  joignant  $M$  au pôle  $p$  de  $d$  par rapport à  $\gamma$ ; c'est une autre forme de la propriété déjà obtenue pour la tangente.*

On construira donc  $MT$  en prenant le point  $T$  où la polaire de  $M$  par rapport à  $\gamma$  coupe  $d$ . Le pied  $m$  de cette polaire sur  $\omega M$  est tel que:

$$Mm \cdot M\omega = \mathcal{R}(M, \gamma) \quad \text{et} \quad Mm = MT \cos \overline{\hat{TM}\omega},$$

d'où, puisque

$$MT = \frac{Md}{\cos \varphi} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}(M, \gamma)}{k}} \cdot \frac{1}{\cos \varphi},$$

$$\frac{M\omega \cdot \cos \overline{TM\omega}}{\sqrt{|\mathcal{P}(M, \gamma)|}} = \sqrt{|k|} \cos \varphi.$$

Si  $M$  est extérieur à  $\gamma$ ,  $k > 0$ ,  $\frac{\sqrt{\mathcal{P}(M, \gamma)}}{M\omega}$  est le cosinus du demi-angle sous lequel de  $M$  on voit  $\gamma$ ; soit  $\cos \alpha(M, \gamma)$ .

Si  $M$  est intérieur à  $\gamma$ ,  $k < 0$ ,  $\frac{\sqrt{-\mathcal{P}(M, \gamma)}}{M\omega}$  est la tangente du demi-angle sous lequel de  $\omega$  on voit la corde de  $\gamma$  dont  $M$  est le milieu; soit  $\operatorname{tg} \beta(M, \gamma)$ . On a donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} k > 0, \quad \frac{\cos \overline{TM\omega}}{\cos \alpha(M, \gamma)} = \sqrt{k} \cos \varphi, \\ k < 0, \quad \frac{\cos \overline{TM\omega}}{\operatorname{tg} \beta(M, \gamma)} = \sqrt{-k} \cos \varphi. \end{array} \right. \quad (20)$$

*Le fait que le premier membre des formules (20) est, pour  $M$  fixe sur  $\mathcal{C}$ , le même pour tous les cercles focaux d'une même série est la généralisation à deux tels cercles de la propriété classique: la tangente bissecte les rayons vecteurs.*

## 10. — AUTRES MÉTHODES. CERCLES FOCAUX DES OVALES DE DESCARTES.

Ces exemples suffiront à montrer les exercices de généralisation que l'on peut envisager; bien que nos énoncés ne constituent pas les seules généralisations possibles, les cas où l'on obtiendrait des résultats élégants et assez simples pour être utiles à de jeunes élèves paraissent peu nombreux. Il faut noter d'ailleurs que l'exposé actuel se prête mal à la généralisation des propriétés les plus élémentaires des coniques lesquelles résultent, non de la définition que nous avons généralisée par la formule (7), mais de celle-ci: une conique est le lieu du centre  $M$