Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROBLÈMES SUR LES TRIANGLES INSCRITS DANS UN TRIANGLE

DONNÉ

Autor: Feldheim, Ervin

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28601

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

PROBLÈMES SUR LES TRIANGLES INSCRITS 329

Le moment de cette résultante, par rapport à A, a pour valeur

$$(p + q) \cdot AN = \left(\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ}\right) \cdot AN$$
.

Nous venons de voir que ce produit est 2AM, c'est-à-dire la mesure de la diagonale du parallélogramme construit sur AB et AC.

Le vecteur-moment de p est dans le plan APQ et perpendiculaire à AP, dans un sens convenable; le vecteur-moment de qest dans le plan APQ et perpendiculaire à AQ, dans le sens voulu; enfin le vecteur-moment de la résultante est dans le plan APQ et perpendiculaire de même à AN. Et ces vecteursmoments ont pour valeurs respectivement AB, AC et 2AM.

Par conséquent, nous aurons ces trois vecteurs-moments en faisant tourner le parallélogramme construit sur AB et AC, dans son plan, de $\pi/2$, dans le sens convenable.

Le moment de la résultante est donc bien la somme géométrique des moments des deux composantes.

PROBLÈMES SUR LES TRIANGLES INSCRITS DANS UN TRIANGLE DONNÉ

PAR

Ervin Feldheim (Budapest).

I. — Considérons, pour commencer, un triangle arbitraire $A_0 B_0 C_0$ et prenons les points A_1 , B_1 , C_1 respectivement sur les côtés $B_0 C_0$, $C_0 A_0$, $A_0 B_0$. Construisons le triangle A' B' C' circonscrit autour de $A_0 B_0 C_0$, et tel que les côtés respectifs soient parallèles à ceux de $A_1 B_1 C_1$. Introduisons pour les aires des triangles précédents les notations suivantes:

$$A_0 B_0 C_0 = t_0$$
, $A_1 B_1 C_1 = t_1$, $A' B' C' = t'$.

Nous allons montrer qu'entre les aires des trois triangles construits d'après ce qui précède, il y a la relation

$$t_0^2 = t_1 t' \ . \tag{1}$$

En effet, joignons les trois couples de points $A_1 A'$, $B_1 B'$, $C_1 C'$. Les triangles $A_1 B_1 C_1$ et A' B' C' sont semblables; si le rapport de similitude est k, et m_1 la distance des côtés $A_1 C_1$ et A' C', on a

aire du trapèze
$$A_1A'C'C_1 = \frac{1}{2} m_1 (A_1C_1 + A'C')$$

= $(k + 1) \cdot \frac{1}{2} m_1 \cdot A_1C_1 = (k + 1) \cdot \text{aire de } A_1B_0C_1$.

En faisant la somme des aires des trois trapèzes $A_1 A' C' C_1$, $C_1 C' B' B_1$ et $B_1 B' A' A_1$ ainsi exprimées, il vient

$$t' - t_1 = (k + 1) (t_0 - t_1)$$
.

Mais $t' = k^2 t_1$, donc

$$(k^2-1) t_1 = (k+1) (t_0-t_1)$$

et ainsi $t_0 = kt_1$. Il en résulte bien la relation $t_0^2 = t_1 t'$.

On peut se poser alors la question, comment construire le triangle A_2 B_2 C_2 , inscrit dans A_1 B_1 C_1 de telle façon que ses côtés respectifs soient parallèles à ceux de A_0 B_0 C_0 ? Pour répondre à cette question, nous démontrons que:

Les droites A_1 A', B_1 B' et C_1 C' se coupent en un point commun P de leur plan. Les segments A_0 P, B_0 P et C_0 P coupent les côtés B_1 C_1 , C_1 A_1 et A_1 B_1 respectivement en A_2 , B_2 et C_2 , tels que A_2 B_2 C_2 sera le triangle cherché.

Désignons par α_1' , α_2' ; β_1' , β_2' ; γ_1' , γ_2' les angles marqués sur la figure 1. On a

$$\sin \alpha_1' = \frac{m_1}{A_1 A'} = \frac{2 \cdot A_1 B_0 C_1}{A_1 C_1 \cdot A_1 A'}, \quad \sin \alpha_2' = \frac{2 \cdot A_1 C_0 B_1}{A_1 B_1 \cdot A_1 A'},$$

d'où

$$\frac{\sin \alpha_{1}^{'}}{\sin \alpha_{2}^{'}} = \frac{A_{1}B_{1}}{A_{1}C_{1}} \cdot \frac{A_{1}B_{0}C_{1}}{A_{1}C_{0}B_{1}},$$

PROBLÈMES SUR LES TRIANGLES INSCRITS 331 où par exemple A_1 B_0 C_1 signifie ici l'aire de ce triangle. De la même façon,

$$\frac{\sin \, \beta_{1}^{'}}{\sin \, \beta_{0}^{'}} = \frac{B_{1} \, C_{1}}{A_{1} B_{1}} \cdot \frac{A_{1} \, C_{0} \, B_{1}}{B_{1} \, A_{0} \, C_{1}} \quad \text{et} \quad \frac{\sin \, \gamma_{1}^{'}}{\sin \, \gamma_{2}^{'}} = \frac{C_{1} \, A_{1}}{B_{1} \, C_{1}} \cdot \frac{B_{1} \, A_{0} \, C_{1}}{A_{1} \, B_{0} \, C_{1}} \,,$$

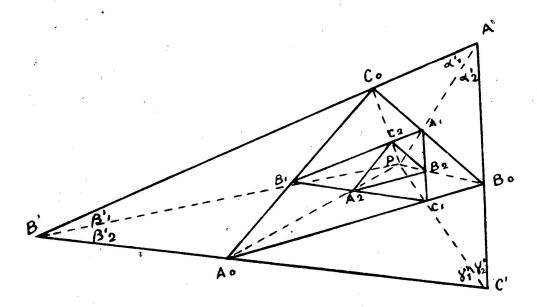


Fig. 1.

de sorte que

$$\frac{\sin \, \alpha_{_{1}}^{'} \cdot \sin \, \beta_{_{1}}^{'} \cdot \sin \, \gamma_{_{1}}^{'}}{\sin \, \alpha_{_{2}}^{'} \cdot \sin \, \beta_{_{2}}^{'} \cdot \sin \, \gamma_{_{2}}^{'}} = 1 \; .$$

Cette identité, n'étant qu'une autre forme de la relation bien connue de Ceva, prouve que A'A₁, B'B₁ et C'C₁ passent par un point commun P.

Alors, B₁ C₁ et B' C' étant parallèles, nous aurons

$$\frac{PA_2}{PA_0} = \frac{PC_1}{PC'} = \frac{PB_2}{PB_0},$$

ce qui suffit pour voir que $A_2 B_2$ est bien parallèle à $A_0 B_0$.

Remarquons que les côtés de A_2 B_2 C_2 sont coupés par P A_0 , P B_0 , P C_0 en des points A_3 , B_3 , C_3 tels que le triangle A_3 B_3 C_3 inscrit dans A_2 B_2 C_2 a ses côtés parallèles à ceux de A_1 B_1 C_1 , et ainsi de suite.

Il est très facile de calculer les côtés a_n , b_n , c_n du triangle $A_n B_n C_n$, en fonction des données relatives aux triangles $A_0 B_0 C_0$ et $A_1 B_1 C_1$ qui sont arbitraires. Or, on a

$$t_{n-1}^2 = t_n \cdot t_{n-2}$$
 $(n = 2, 3, ...)$

Mais, par exemple

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-2}}\right)^2 = \frac{t_n}{t_{n-2}}$$
, donc $\frac{a_n}{a_{n-2}} = \frac{t_{n-1}}{t_{n-2}} = \frac{t_n}{t_{n-1}}$,

c'est-à-dire

$$a_n = \frac{t_n}{t_{n-1}} \cdot a_{n-2}$$
 ou $a_n = \frac{t_1}{t_0} \cdot a_{n-2}$.

Il en résulte finalement que

$$a_{2n} = \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^n \cdot a_0, \quad a_{2n+1} = \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^n \cdot a_1. \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$
 (2)

Remarquons encore que

$$t_n = t_0 \cdot \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^n \quad (n = 0, 1, 2, ...)$$
 (3)

et l'on peut aussi écrire, pour tout n,

$$a_n = a \cdot \left(\frac{t_1}{t_0}\right)^n$$

a désignant a_0 ou a_1 selon que n est pair ou impair.

II. — Nous allons généraliser le premier résultat de la façon suivante: Prenons deux triangles arbitraires ABC et A'B'C' dans le plan et construisons les deux triangles DEF et D'E'F' circonscrits respectivement à ABC et A'B'C', et tels que les côtés de DEF soient parallèles aux côtés respectifs de A'B'C', et ceux de D'E'F' soient parallèles aux côtés respectifs de ABC. Si nous désignons par t, t', T et T' les aires des triangles ABC, A'B'C', DEF et D'E'F', nous aurons cet énoncé:

Entre les aires des triangles ABC, A'B'C', DEF et D'E'F' construits de la façon indiquée, il y a la relation

$$\frac{t}{t'} = \frac{\mathrm{T}}{\mathrm{T}'} .$$

Désignons par α , β , γ , resp. α' , β' , γ' les angles des triangles A B C et A' B' C', et par ϕ l'angle formé par A' B' et E' F'. On

aura alors $\stackrel{\textstyle \wedge}{\mathrm{BCD}} = \varphi$. Il est très facile à établir que

$$\begin{split} EF &= \frac{AC \cdot \sin \left(\gamma + \phi \right)}{\sin \beta'} + \frac{AB \cdot \sin \left(\alpha' - \beta + \phi \right)}{\sin \gamma'} \\ E'F' &= \frac{A'B' \cdot \sin \left(\gamma + \phi \right)}{\sin \gamma} + \frac{A'C' \cdot \sin \left(\alpha' - \beta + \phi \right)}{\sin \beta} \,. \end{split}$$

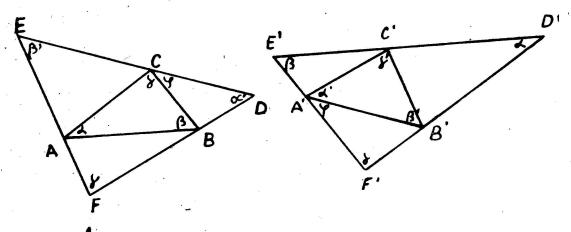


Fig. 2.

Si l'on fait observer que

$$A'B'\sin \beta' = A'C'\sin \gamma'$$

et

$$AB \cdot \sin \beta = AC \cdot \sin \gamma$$

on trouve que

$$\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{E'F'}} = \frac{\mathrm{AB} \, \sin \, \beta}{\mathrm{A'C'} \, \sin \, \gamma'} = \frac{t}{t'} \, \cdot \frac{\mathrm{B'C'}}{\mathrm{BC}} \, ,$$

c'est-à-dire

$$\frac{t}{t'} = \frac{BC \cdot EF}{B'C' \cdot E'F'} . \tag{4}$$

D'autre part, la similitude des triangles ABC, D'E'F' et A'B'C', DEF entraı̂ne que

$$\frac{t}{\mathrm{T'}} = \left(\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{E'}\,\mathrm{F'}}\right)^2$$
, $\frac{t'}{\mathrm{T}} = \left(\frac{\mathrm{B'}\,\mathrm{C'}}{\mathrm{EF}}\right)^2$,

donc

$$\left(\frac{BC \cdot EF}{B'C' \cdot E'F'}\right)^2 = \frac{tT}{t'T'}, \qquad (5)$$

ce qui donne bien, en tenant compte de (4), l'égalité à démontrer

$$tT' = t'T$$
.

laquelle comprend le premier résultat.

III. — Nous dirons encore quelques mots sur la généralisation des problèmes précédents à des polygones. Rappelons, pour le cas du quadrilatère, la position du problème. Considérons le quadrilatère $A_0 B_0 C_0 D_0$, et inscrivons dans celui-ci un autre quadrilatère $A_1 B_1 C_1 D_1$, de telle façon que ses sommets soient respectivement sur les côtés $C_0 D_0$, $D_0 A_0$, $A_0 B_0$, $B_0 C_0$. Menons ensuite des parallèles A' B', B' C', C' D', D' A' aux côtés de $A_1 B_1 C_1 D_1$, passant par les sommets de $A_0 B_0 C_0 D_0$. On peut se proposer de chercher la relation qui existe entre les aires de ces trois quadrilatères. En répétant une démonstration précédente, on verra que si les quadrilatères $A_1 B_1 C_1 D_1$ et A' B' C' D' sont semblables, la relation $t_0^2 = t_1 t'$ subsiste encore pour ce cas. On verra aussi que: A' A_1 , B' B_1 , C' C_1 , D' D_1 passeront par un point commun P. C'est ainsi dans le cas des polygones réguliers.

Donnons ici explicitement le calcul des aires pour le cas où les trois quadrilatères sont des parallélogrammes. Posons

$$\begin{split} \mathbf{A_0B_0} &= a_0 \;,\; \mathbf{B_0C_0} = b_0 \;,\; \mathbf{B_0A_0D_0} = \alpha_0 \\ \mathbf{A_1B_1} &= a_1 \;,\; \mathbf{B_1C_1} = b_1 \;,\; \mathbf{B_1A_1D_1} = \alpha_1 \\ \mathbf{B_1A_1D_0} &= \varphi \\ \mathbf{A'B'} &= a' \;,\;\; \mathbf{B'C'} = b' \;. \end{split}$$

Il est très facile de montrer que

$$2a_0 b_0 \sin \alpha_0 = (a' b_1 + a_1 b') \sin \alpha_1$$
.

En élevant au carré, il vient

$$4t_1^2 = (a' b_1 - a_1 b')^2 \sin^2 \alpha_1 + 4t_1 t'.$$

PROBLÈMES SUR LES TRIANGLES INSCRITS 335

On voit donc qu'on n'a le théorème exprimé par l'identité $t_0^2 = t_1 t'$ que dans le cas où $\frac{a'}{a_1} = \frac{b'}{b_1}$; la similitude de A'B'C'D' et $A_1 B_1 C_1 D_1$ est non seulement une condition suffisante mais aussi une condition nécessaire pour que le premier énoncé soit vérifié pour des parallélogrammes.

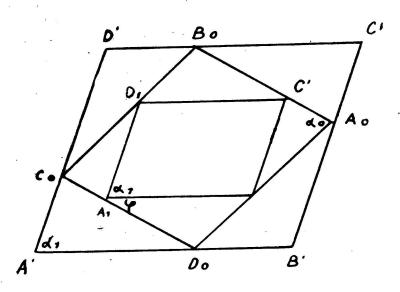


Fig. 3.

Nous allons démontrer maintenant que la condition précédente pour la validité de cet énoncé n'est satisfaite dans le cas de parallélogrammes que si ces derniers sont des carrés.

Calculons, en effet, les côtés du parallélogramme A' B' C' D'. Il vient

$$\begin{split} a' &= a_1 + \frac{2b_1\sin\left(\alpha_1 + \varphi\right)\sin\left(\alpha_1 - \alpha_0 + \varphi\right)}{\sin\alpha_0\sin\alpha_1} \;, \\ b' &= b_1 + \frac{2a_1\sin\varphi\sin\left(\alpha_0 - \varphi\right)}{\sin\alpha_0\sin\alpha_1} \;. \end{split}$$

La relation a' $b_1 = a_1$ b' entraı̂ne alors, en identifiant aux deux membres, les facteurs de sin φ et cos φ , que l'on doit avoir

d'où finalement

$$a_1 = b_1$$
, $\alpha_0 = \alpha_1 = 90^{\circ}$, C.Q.F.D.