Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES PROBLÈMES REMARQUABLES RELATIFS AU TRAPÈZE

Autor: Bongiovanni, Emilia

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28599

SUR QUELQUES PROBLÈMES REMARQUABLES RELATIFS AU TRAPÈZE

PAR

M[lle] Emilia Bongiovanni (Turin).

Dans l'excellent livre *Exercices de Géométrie*, par M. Ph. André (15[me] édition, Paris), on trouve, à la page 375, la solution du problème suivant:

Inscrire à un cercle donné un trapèze ayant une hauteur donnée et équivalent à un carré.

La solution exposée par l'Auteur est assez compliquée, parce qu'il emploie les théorèmes de Thalès, de Pythagore et plusieurs transformations de caractère algébrique. Je me propose de montrer comment on peut résoudre le problème en question, d'une manière beaucoup plus élémentaire, sans appliquer les théorèmes précédents, ni les transformations algébriques qui en découlent; effectivement, il suffit d'appliquer des propriétés très élémentaires relatives à des arcs d'une même circonférence.

D'une manière analogue, par des considérations assez élémentaires, j'expose la solution d'autres problèmes semblables.

1. — En commençant par le problème traité par M. André, nous remarquons que, étant données la surface et la hauteur du trapèze, on connaît par là la somme des bases, par conséquent ce problème est réduit à celui de construire un trapèze dont on connaît la somme des bases et la hauteur.

Cela établi, soient AD, BC les bases du trapèze ABCD que l'on cherche (fig. 1), inscrit dans la circonférence de centre O, et soit M le milieu de l'arc AB. Traçons la corde MF parallèle aux bases du trapèze et soit N son intersection avec la perpendiculaire aux bases du trapèze passant par le milieu G du côté BC, et proposons-nous de déterminer MN.

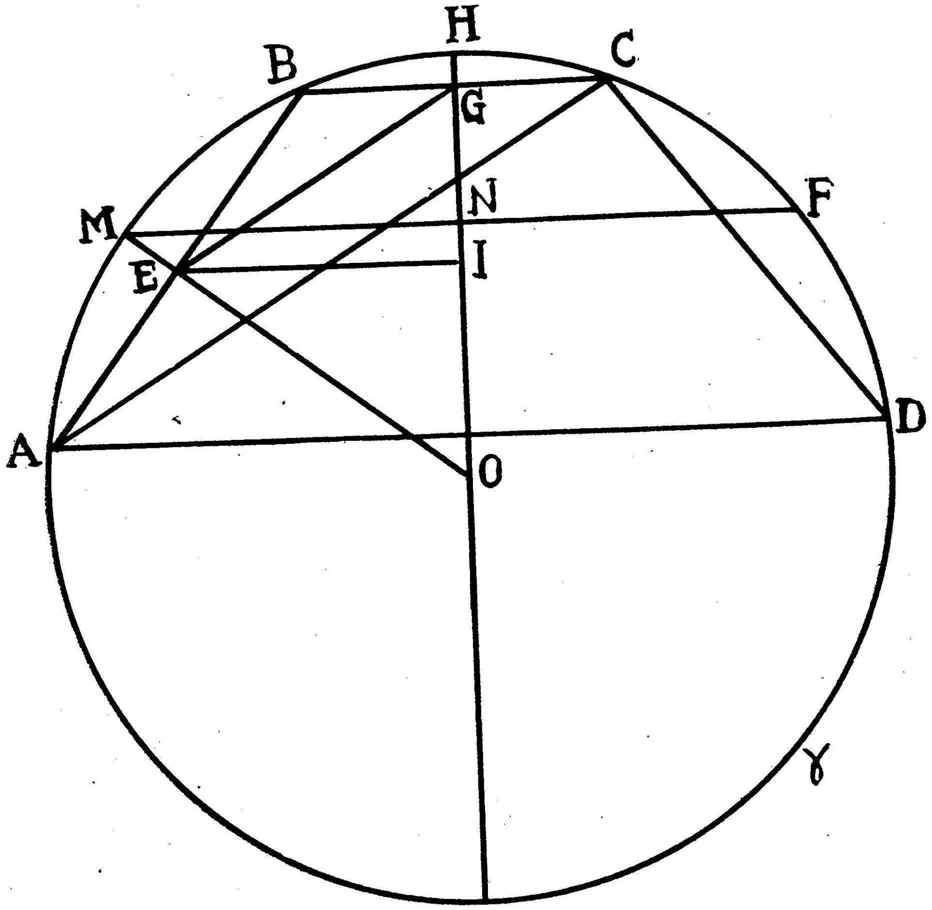

Fig. 1.

Soit E le milieu de la corde AB et menons EI parallèle aux bases du trapèze; alors EI sera évidemment égal à la demi-somme des deux bases du trapèze et par suite le segment EI sera connu.

Comme le segment GI est aussi connu, puisqu'il est la moitié de la hauteur, nous connaîtrons l'hypoténuse GE du triangle rectangle GEI.

Maintenant *je dis que* MN = GE. En effet, il est évident que F est le milieu de l'arc CD, d'où il suit que les arcs AM et CF sont égaux; on en conclut que les arcs AHC et MHF sont égaux et par conséquent que les cordes respectives sont aussi égales, c'est-à-dire AC = MF.

Il est évident que leurs moitiés GE et MN sont aussi égales, et cela entraîne MN = GE, comme nous l'avions affirmé.

Il résulte de là cette très simple construction graphique:

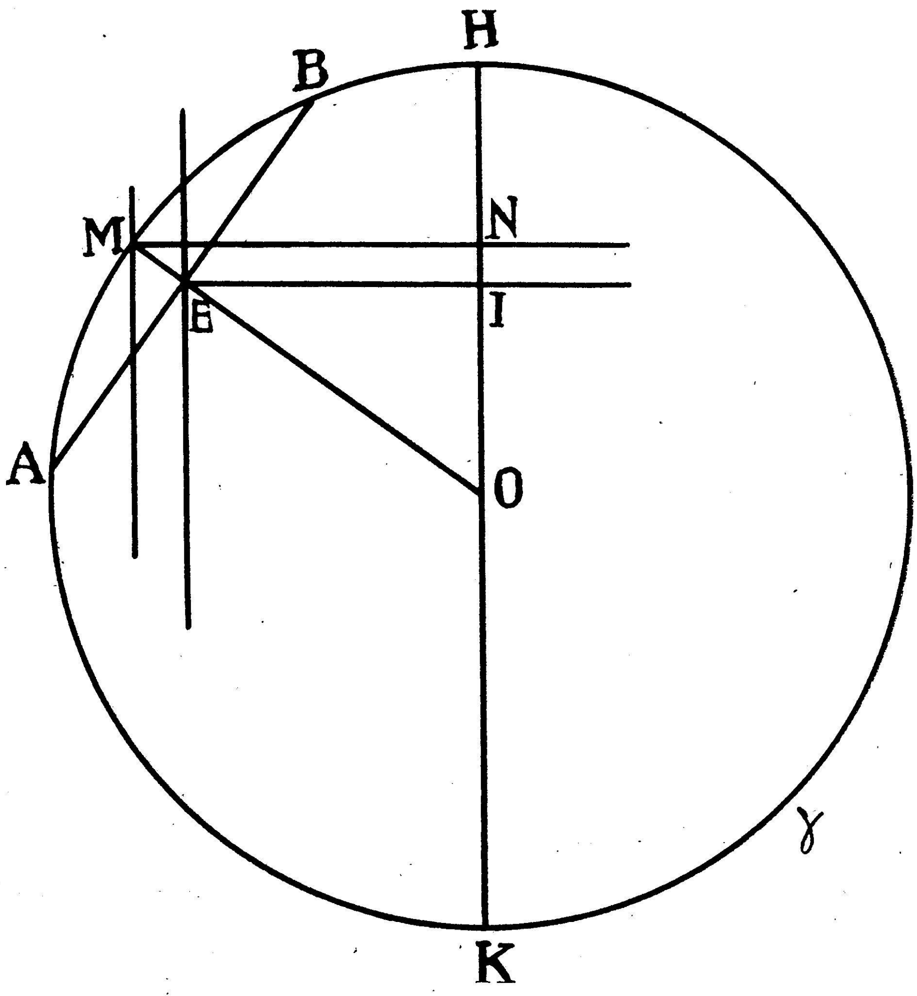

Fig. 2.

Soit γ la circonférence donnée (fig. 2) de centre O; considérons un diamètre quelconque HK et traçons-lui une parallèle à une distance égale au segment connu GE. Nous obtiendrons sur la circonférence γ le point M que nous joindrons au centre O. Menons ensuite une parallèle à HK, à une distance égale à la demi-somme des bases; elle coupera le rayon OM en un point E, qui sera le milieu d'un des côtés obliques du trapèze; si nous construisons la perpendiculaire au rayon OM en E et ses intersections A et B avec la circonférence γ, nous aurons deux sommets du trapèze; après cela le problème est résolu.

2. — Nous allons examiner le problème suivant:

On connaît la somme des bases et les côtés obliques d'un trapèze inscrit dans une circonférence; construire le trapèze.

Soit ABCD le trapèze cherché (fig. 3) inscrit dans la circonférence de centre O; soit BH la hauteur et BD une diagonale. Il est évident que HD est égal à la demi-somme des bases; c'est donc un segment connu.

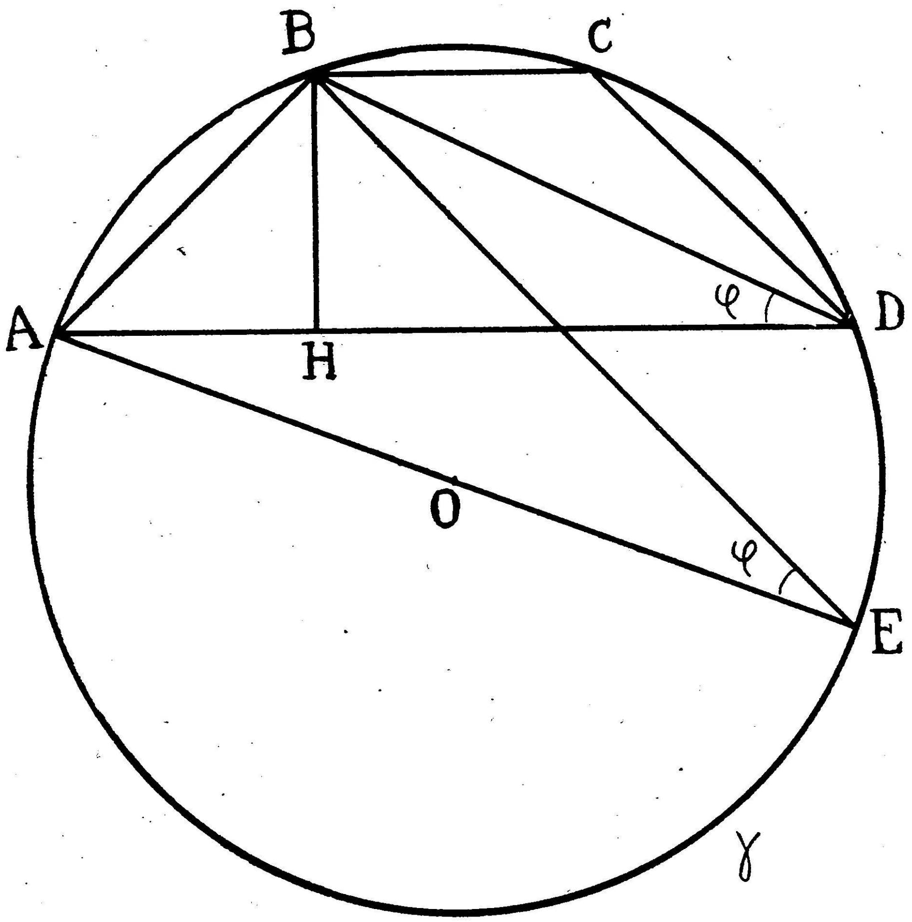

Fig. 3.

Je considère d'abord le diamètre AE et le triangle ABE; il s'en suit que les angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{BEA}$ sont égaux, parce qu'ils sont inscrits dans le même arc de cercle. Mais il est clair que l'angle $\widehat{BEA}$ peut être regardé connu, parce que, du triangle rectangle BEA, on connaît l'hypoténuse AE et le côté AB de l'angle droit; par conséquent l'angle $\widehat{BDA}$ est aussi connu, et comme on connaît HD, on peut considérer le triangle BHD comme connu; nous pouvons alors construire BD de la manière suivante:

Soit γ la circonférence donnée (fig. 4); menons le diamètre AE et à partir du point A prenons la corde AB égale au côté oblique donné. Sur le diamètre considéré, prenons le segment EM égal à la demi-somme des bases du trapèze. J'élève en M la perpendiculaire à AE et soit N son intersection avec BE; le segment NE

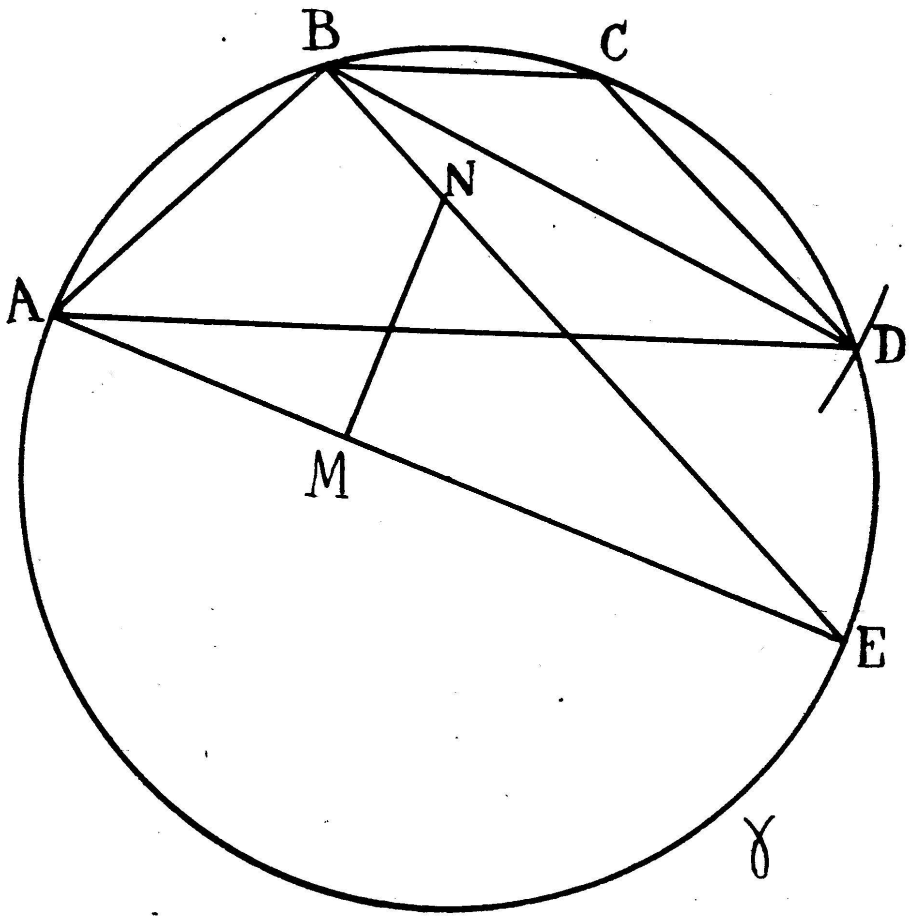

Fig. 4.

sera égal à la diagonale BD du trapèze. Par B menons la corde BD égale au segment NE, alors le segment AD sera la grande base du trapèze. Par B traçons la parallèle BC à la base AD et nous aurons ainsi la petite base du trapèze.

3. — Étudions maintenant cet autre problème:

On connaît la surface et les deux côtés obliques d'un trapèze inscrit dans une circonférence; construire le trapèze.

Soit ABCD le trapèze cherché, inscrit dans la circonférence de centre O (fig. 5) et soit BH la hauteur du trapèze. Je remarque d'abord que HD est égal à la demi-somme des bases.

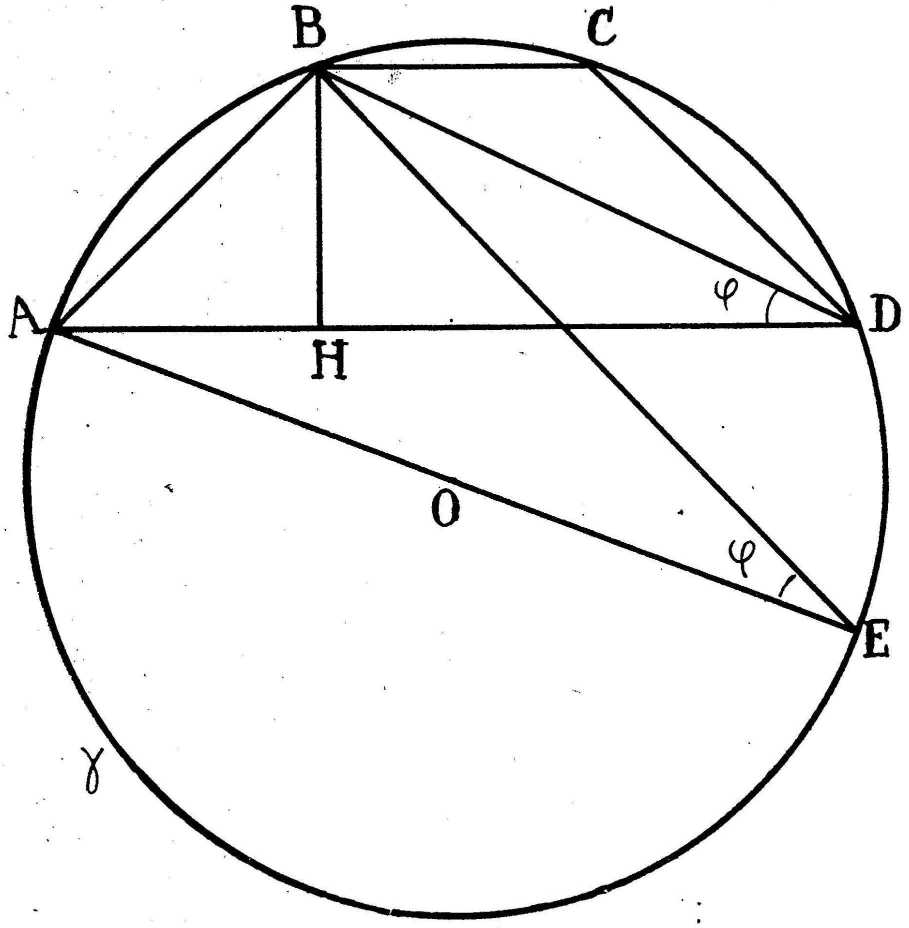

Fig. 5.

La surface du trapèze étant connue, il en sera de même pour le rectangle qui a pour côtés la demi-somme des bases et pour hauteur celle du trapèze. Je trace ensuite le diamètre AE et le segment EB; j'obtiens ainsi le triangle ABE. Dans ce triangle on peut regarder BE comme connu, car il est le côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est le diamètre de la circonférence donnée, l'autre côté de l'angle droit étant l'un des côtés obliques.

En outre les deux triangles BHD et ABE sont semblables, car les angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{BEA}$ sont égaux, ainsi que nous l'avons remarqué dans l'exercice précédent; on déduit alors la relation:

$$AB : BE = BH : HD.$$

Nous sommes désormais réduits à construire deux segments BH, HD dont on connaît le rapport et le produit, qui peut être considéré équivalent à un carré de côté donné l.

La construction graphique de ces deux segments est la suivante:

Construisons un triangle rectangle ABE, dont un côté de l'angle droit soit égal au côté oblique AB et l'hypoténuse égale au diamètre AE de la circonférence donnée γ.

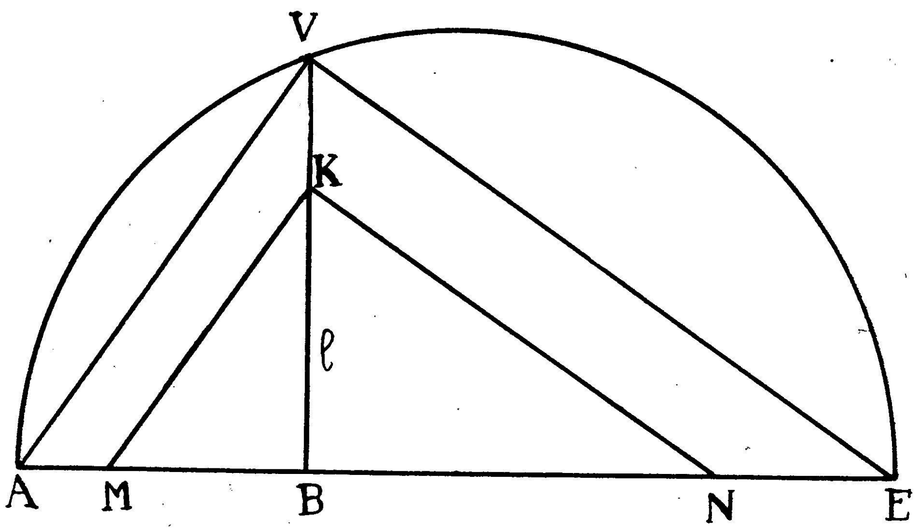

Fig. 6.

Traçons ensuite (fig. 6) une demi-circonférence ayant comme diamètre la somme AB + BE des côtés de l'angle droit du triangle rectangle que nous venons de construire, puis en B élevons la perpendiculaire rencontrant la demi-circonférence en V, ensuite menons VA et VE. Portons sur BV le segment BK $= l$ et par l'extrémité K construisons les parallèles KM et KN à VA et VE. Alors BM et BN sont les segments cherchés, dont le premier représente BH et le deuxième HD.

Il en résulte la construction suivante pour le trapèze cherché (fig. 7).

Soit γ la circonférence donnée, prenons la corde AB égale à un des côtés obliques; du centre en B et avec un rayon égal à BM traçons un arc de cercle (fig. 7), puis de A menons la tangente à cet arc; elle coupera encore la circonférence en D.

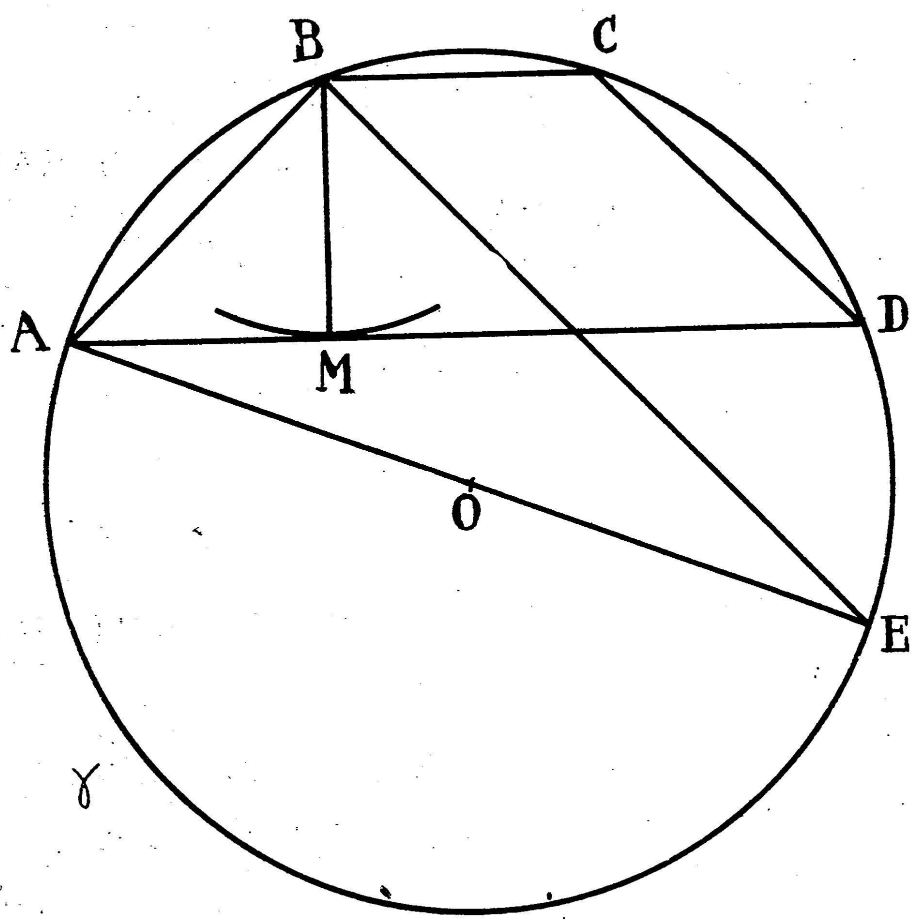

Fig. 7.

AD représentera la grande base du trapèze. Si par B nous menons la parallèle BC à AD, BC sera la petite base.

On obtient ainsi le trapèze cherché.