Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 37 (1938)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR QUELQUES THÉORÈMES GÉOMÉTRIQUES DE CHARLES STURM

Autor: Vivanti, G.

Kapitel: IV. – LES POLYEDRES RÉGULIERS.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28596

Si x_h, y_h $(h = 0, 1, ..., n-1)$ sont les coordonnées des sommets du polygone, et l est la longueur commune des côtés, les équations normales des côtés sont

$$\frac{1}{l}\left[(y_{h+1} - y_h)\,x + (x_h - x_{h+1})\,y + (x_{h+1}\,y_h - x_h\,y_{h+1})\right] = 0 \ .$$

Il suit immédiatement de là

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h = \frac{1}{l}\sum_{h=0}^{n-1}(x_{h+1}\,y_h - x_h\,y_{h+1}) \ .$$

IV. — Les polyèdres réguliers.

Je vais démontrer les théorèmes suivants:

D. — *La somme algébrique des distances d'un point aux faces d'un polyèdre régulier est constante pour tous les points de l'espace.*

E. — *Le lieu des points tels, que la somme des puissances* m$^{\text{ièmes}}$ *de leurs distances aux faces d'un polyèdre régulier soit constante, est une sphère concentrique au polyèdre pour les valeurs suivantes de* m:

2 *pour le tétraèdre;*
2 *et* 3 *pour l'hexaèdre et l'octaèdre;*
2, 3 *et* 4 *pour le dodécaèdre et l'icosaèdre* [1].

La même chose, sauf l'unicité de la sphère, pour toute fonction symétrique des distances, avec les mêmes limitations pour le degré m.

F. — *Sous les mêmes conditions des théorèmes précédents pour le nombre* m, *le lieu des points tels, que la somme des* 2m$^{\text{ièmes}}$ *puissances de leurs distances aux sommets d'un polyèdre soit constante, est une sphère concentrique au polyèdre.*

Les théorèmes D *et* E.

Prenons sur la sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine des coordonnées, n points distribués uniformément sur un

[1] On peut dire que m doit être moindre que le nombre des sommets disposés en couronne autour d'un axe dans le polyèdre respectif.

cercle situé dans un plan perpendiculaire à l'axe z. Désignons par (x_h, y_h, z_h) et par $\left(1, \eta_h, \frac{\pi}{2} - \gamma\right)$ $(h = 0, 1, \ldots n-1)$ leurs coordonnées cartésiennes et polaires; z_h et γ sont indépendants de h et

$$\eta_h = \eta_0 + \frac{2h\pi}{n} \qquad (h = 0, 1, \ldots, n-1) .$$

Si (x, y, z) et (ρ, φ, ψ) sont les coordonnées cartésiennes et polaires d'un point quelconque de l'espace, on a

$$xx_h + yy_h + zz_h = \rho \left\{ (\cos\varphi \cos\eta_h + \sin\varphi \sin\eta_h) \sin\gamma \cos\psi + \right.$$

$$\left. + \cos\gamma \sin\psi \right\} = \rho \left\{ \cos\left(\eta_0 - \varphi + \frac{2h\pi}{n}\right) \sin\gamma \cos\psi + \cos\gamma \sin\psi \right\} .$$

Or nous avons trouvé, quel que soit φ [voir éq. (1)]:

$$s_1 = \sum_{h=0}^{n-1} \cos\left(\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right) = 0 \qquad \text{pour} \quad n > 1 ,$$

$$s_2 = \sum_{h=0}^{n-1} \cos^2\left(\varphi + \frac{2\pi h}{n}\right) = \frac{n}{2} \qquad \text{pour} \quad n > 2 ,$$

$$s_3 = \sum_{h=0}^{n-1} \cos^3\left(\varphi + \frac{2\pi h}{n}\right) = 0 \qquad \text{pour} \quad n > 3 ,$$

$$s_4 = \sum_{h=0}^{n-1} \cos^4\left(\varphi + \frac{2\pi h}{n}\right) = \frac{3n}{8} \qquad \text{pour} \quad n > 4 .$$

Il s'en suit, sous les mêmes conditions

$$\sum_{h=0}^{n-1} (xx_h + yy_h) = 0 ,$$

$$\sum_{h=0}^{n-1} (xx_h + yy_h)^2 = \frac{n}{2} \rho^2 \cos^2\gamma \sin^2\psi ,$$

$$\sum_{h=0}^{n-1} (xx_h + yy_h)^3 = 0 ,$$

$$\sum_{h=0}^{n-1} (xx_h + yy_h)^4 = \frac{3n}{8} \rho^4 \cos^4\gamma \sin^4\psi ,$$

et, par conséquent:

$$\left.\begin{aligned}
P_{1,n} &= \sum_{h=0}^{n-1} (xx_h + yy_h + zz_h) = n\rho \cos\gamma \sin\psi\,, \\
P_{2,n} &= \sum_{h=0}^{n-1} (xx_h + yy_h + zz_h)^2 = \\
&= \frac{n}{2}\rho^2 [\cos^2\psi \sin^2\gamma + 2\sin^2\psi\cos^2\gamma]\,, \\
P_{3,n} &= \sum_{h=0}^{n-1} (xx_h + yy_h + zz_h)^3 = \\
&= \frac{n}{2}\rho^3 [3\cos^2\psi\sin^2\gamma + 2\sin^2\psi\cos^2\gamma]\sin\psi\cos\gamma\,, \\
P_{4,n} &= \sum_{h=0}^{n-1} (xx_h + yy_h + zz_h)^4 = \\
&= n\rho^4 \left[\frac{3}{8}\cos^4\psi\sin^4\gamma + \right. \\
&\left. + 3\cos^2\psi\sin^2\psi\cos^2\gamma\sin^2\gamma + \sin^4\psi\cos^4\gamma\right].
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Il va sans dire que l'expression de $P_{k,n}$ est valable seulement pour $k < n$.

Supposons un polyèdre régulier inscrit dans une sphère de rayon 1 ayant pour centre l'origine des coordonnées, et disposons-le de façon qu'une ou deux faces soient parallèles au plan xy (tétraèdre, hexaèdre, dodécaèdre), ou qu'un sommet se trouve au point (0, 0, 1) (tétraèdre, octaèdre, icosaèdre). Nous pourrons distinguer dans le polyèdre

a) des faces parallèles au plan xy;

b) des couronnes de faces également inclinées sur l'axe z, et déduisibles de l'une d'elles par des rotations successives d'un sous-multiple $\frac{2\pi}{n}$ de 2π autour de l'axe z; nous dirons que n est *l'ordre* de la couronne.

L'équation normale d'une face parallèle au plan xy est

$$\pm z + \delta = 0\,, \qquad (3)$$

où δ est la distance du centre aux faces.

Les équations normales des faces d'une couronne d'ordre n et d'inclinaison γ sont[1]

$$xx_h + yy_h + zz_h + \delta = 0 , \tag{4}$$

où (x_h, y_h, z_h) est le point de rencontre de la sphère avec la perpendiculaire à la face issue du centre, ou, ce qui est la même chose, où x_h, y_h, z_h sont les cosinus directeurs de cette perpendiculaire. Les premiers membres des équations (3) et (4) donnent les distances du point (x, y, z) aux faces.

Cela posé, calculons pour les différents polyèdres les sommes des puissances $m^{\text{ièmes}}$ d'un point (x, y, z) aux faces, que nous désignerons par T_m.

Tétraèdre. — Disposons le polyèdre de façon qu'un sommet soit le point (0, 0, 1). Le polyèdre contient alors

une face parallèle au plan xy à distance $\delta = \frac{1}{3}$ du centre;

une couronne d'ordre 3;

le cosinus de l'inclinaison de la perpendiculaire par rapport à l'axe z est le rapport de δ à 1, c'est-à-dire:

$$\cos\gamma = \frac{1}{3} , \qquad \sin\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3} .$$

Les sommes des distances et des carrés des distances du point (x, y, z) ou (ρ, φ, ψ) à la face horizontale et aux faces de la couronne seront respectivement

$$-\rho\sin\psi + \delta , \qquad (-\rho\sin\psi + \delta)^2 ,$$

et

$$xx_h + yy_h + zz_h + \delta , \qquad (xx_h + yy_h + zz_h + \delta)^2 .$$

[1] Par inclinaison d'une couronne nous entendons l'angle de l'axe z avec les perpendiculaires aux faces de la couronne.

On aura donc:

$$T_1 = [-\rho \sin\psi + \delta] + [P_{1,3} + 3\delta] ,$$
$$T_2 = [-\rho \sin\psi + \delta]^2 + [P_{2,3} + 2P_{1,3}\delta + 3\delta^2] ,$$

ou

$$T_1 = [-\rho \sin\psi + \delta] + [\rho \sin\psi + 3\delta] = 4\delta = \text{const.} ,$$
$$T_2 = [\rho^2 \sin^2\psi - 2\delta\rho \sin\psi + \delta^2] +$$
$$+ \left[\frac{3}{2}\rho^2\left(\frac{8}{9}\cos^2\psi + \frac{2}{9}\sin^2\psi\right) + 2\delta\rho\sin\psi + 3\delta^2\right] =$$
$$= \frac{4}{3}\rho^2 + 4\delta^2 .$$

Les théorèmes D et E sont donc démontrés pour le tétraèdre.

Hexaèdre. — Deux faces parallèles au plan xy; une couronne d'ordre 4 où $\gamma = \frac{\pi}{2}$. On a donc pour les sommes des puissances des distances d'exposant < 4

$$T_1 = (-\rho \sin\psi + \delta) + (\rho \sin\psi + \delta) + (P_{1,4} + 4\delta) ,$$
$$T_2 = (-\rho \sin\psi + \delta)^2 + (\rho \sin\psi + \delta)^2 + (P_{2,4} + 2\delta P_{1,4} + 4\delta^2) ,$$
$$T_3 = (-\rho \sin\psi + \delta)^3 + (\rho \sin\psi + \delta)^3 +$$
$$+ (P_{3,4} + 3\delta P_{2,4} + 3\delta^2 P_{1,4} + 4\delta^3) ,$$

ou

$$T_1 = (-\rho \sin\psi + \delta) + (\rho \sin\psi + \delta) + 4\delta = 6\delta = \text{const.} ,$$
$$T_2 = (\rho^2 \sin^2\psi - 2\delta\rho \sin\psi + \delta^2) + (\rho \sin^2\psi + 2\delta\rho\sin\psi + \delta^2) +$$
$$+ (2\rho^2\cos^2\psi + 4\delta^2) = 2\rho^2 + 6\delta^2 ,$$
$$T_3 = (-\rho^3 \sin^3\psi + 3\delta\rho^2 \sin^2\psi - 3\delta^2\rho \sin\psi + \delta^3) +$$
$$+ (\rho^3 \sin^3\psi + 3\delta\rho^2 \sin^2\psi + 3\delta^2\rho \sin\psi + \delta^3) +$$
$$+ (6\delta\rho^2\cos^2\psi + 4\delta^3) = 6\delta(\rho^2 + \delta^2) .$$

Les deux théorèmes sont donc démontrés pour l'hexaèdre.

Octaèdre. — Deux couronnes d'ordre 4. La distance du centre aux faces est $\frac{1}{\sqrt{3}}$; il s'en suit

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} , \qquad \sin\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}} .$$

On obtient:

$$T_1 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\rho\sin\psi + 4\delta\right) + \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\rho\sin\psi + 4\delta\right) = 8\delta = \text{const.}\ ,$$

$$T_2 = \left[2\rho^2\left(\frac{2}{3}\cos^2\psi + \frac{2}{3}\sin^2\psi\right) + \frac{8}{\sqrt{3}}\delta\rho\sin\psi + 4\delta^2\right]$$

$$+ \left[2\rho\left(\frac{2}{3}\cos^2\psi + \frac{2}{3}\sin^2\psi\right) - \frac{8}{\sqrt{3}}\delta\rho\sin\psi + 4\delta^2\right] =$$

$$= \frac{8}{3}\rho^2 + 8\delta^2\ ,$$

$$T_3 = [A + 4\delta\rho^2 + B + 4\delta^3] + [-A + 4\delta\rho^2 - B + 4\delta^3] = 8\delta(\rho^2 + \delta^2)$$

où

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}\rho^3\left(4\sin\psi + \frac{4}{3}\cos^2\psi\right)\ , \qquad B = \frac{12}{\sqrt{3}}\delta^2\rho\sin\psi\ .$$

Les deux théorèmes sont donc démontrés pour l'octaèdre.

Dodécaèdre. — Deux faces parallèles au plan xy; deux couronnes d'ordre 5. Il faut calculer l'inclinaison γ de la perpendiculaire aux faces de l'une d'elles; pour l'autre l'inclinaison sera $\pi - \gamma$. On sait que l'angle dièdre η de deux faces contiguës du dodécaèdre régulier est déterminé par les relations, où $r = \sqrt{5}$,

$$\sin\eta = \frac{2}{r}\ , \qquad \cos\eta = -\frac{1}{r}\ .$$

Le supplément de cet angle est l'angle γ cherché; on a donc

$$\sin\gamma = \frac{2}{r}\ , \qquad \cos\gamma = \frac{1}{r}\ .$$

Il résulte, pour la face et la couronne supérieures prises ensemble, en omettant les termes qui se rencontreraient avec le signe opposé pour la face et la couronne inférieures,

$$T_1 = 6\delta\ , \qquad T_2 = 2\rho^2 + 6\delta^2\ , \qquad T_3 = 3\delta\rho^2 + 6\delta^3\ ,$$

$$T_4 = \frac{6}{5}\rho^4 + 12\delta^2\rho^2 + 6\delta^4\ .$$

On a donc, en total

$$T_1 = 12\delta = \text{const.}\ , \qquad T_2 = 4\rho^2 + 12\delta^2\ , \qquad T_3 = 6\delta\rho^2 + 12\delta^3\ ,$$

$$T_4 = \frac{12}{5}\rho^4 + 24\delta^2\rho^2 + 12\delta^4\ .$$

Les deux théorèmes sont donc démontrés pour le dodécaèdre.

Icosaèdre. — Il y a deux couples de couronnes d'ordre 5. Calculons les inclinaisons respectives, que nous désignerons par γ (et $\pi - \gamma$) et γ_1 (et $\pi - \gamma_1$).

Si l'on mène du centre la perpendiculaire à l'une des faces issues du point (0, 0, 1), l'angle γ de cette perpendiculaire avec l'axe z positif appartiendra à un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est 1, et le cathète opposé est formé par les $^2/_3$ de la hauteur de la face. Or on sait que la longueur de l'arête de l'icosaèdre est $\sqrt{\frac{2(r-1)}{r}}$; la hauteur de la face sera donc $\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{2(r-1)}{r}}$, et les $^2/_3$ de cette hauteur sera $\sqrt{\frac{2(r-1)}{3r}}$. Il résulte

$$\sin\gamma = \sqrt{\frac{2(r-1)}{3r}}\ , \quad \cos\gamma = \sqrt{\frac{r+2}{3r}}\ .$$

L'angle $\gamma_1 - \gamma$ de la perpendiculaire aux faces de la seconde couronne et de la perpendiculaire à celles de la première est le supplément de l'angle dièdre η de deux faces contiguës, qui est déterminé par

$$\sin\eta = \frac{2}{3}\ , \quad \cos\eta = -\frac{r}{3}\ .$$

Il résulte donc:

$$\sin\gamma_1 = \sin(\gamma + \pi - \eta) = \sin(\eta - \gamma) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{r+2}{3r}} + \frac{r}{3}\sqrt{\frac{2r-2}{3r}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3r}}\left(2\sqrt{r+2} + r\sqrt{2r-2}\right)\ ,$$

$$\cos\gamma_1 = -\cos(\eta - \gamma) = \frac{r}{3}\sqrt{\frac{r+2}{3r}} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2r-2}{3r}} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{3r}}\left(r\sqrt{r+2} - 2\sqrt{2r-2}\right)\ .$$

Or

$$\mu=(2\sqrt{r+2}+r\sqrt{2r-2})^2=4r+8+10r-10+4r\sqrt{(r+2)(2r-2)},$$
$$\nu=(r\sqrt{r+2}-2\sqrt{2r-2})^2=5r+10+8r-8-4r\sqrt{(r+2)(2r-2)},$$
$$(r+2)(2r-2)=6+2r=(r+1)^2 .$$

Donc

$$\mu=14r-2+4r(r+1)=18(r+1) ,$$
$$\nu=13r+2-4r(r+1)=-18+9r=9(r-2) ,$$

et

$$\sin\gamma_1=\sqrt{\frac{2(r+1)}{3r}} ,\quad \cos\gamma_1=\sqrt{\frac{r-2}{3r}} .$$

Il suit de là:

$$\left.\begin{array}{c} \sin^2\gamma+\sin^2\gamma_1=\frac{4}{3} ,\quad \cos^2\gamma+\cos^2\gamma_1=\frac{2}{3} , \\ \sin^4\gamma+\sin^4\gamma_1=\frac{16}{15} ,\quad \cos^4\gamma+\cos^4\gamma_1=\frac{2}{5} , \\ \sin^2\gamma\cos^2\gamma+\sin^2\gamma_1\cos^2\gamma_1=\frac{4}{15} . \end{array}\right\} \quad (5)$$

L'ensemble des deux couronnes extrêmes donne

$$T_1=10\delta ,$$
$$T_2=5\rho^2[\cos^2\psi\sin^2\gamma+2\sin^2\psi\cos^2\gamma]+10\delta^2 ,$$
$$T_3=15\delta\rho^2[\cos^2\psi\sin^2\gamma+2\sin^2\psi\cos^2\gamma]+10\delta^3 ,$$
$$T_4=10\rho^4\left(\frac{3}{8}\cos^4\psi\sin^4\gamma+3\sin^2\psi\cos^2\psi\sin^2\gamma\cos^2\gamma+\sin^4\psi\cos^4\gamma\right)$$
$$+30\delta^2\rho^2(\cos^2\psi\sin^2\gamma+2\sin^2\psi\cos^2\gamma)+10\delta^4 .$$

Les formules analogues pour les deux couronnes moyennes s'obtiennent de celles-ci en substituant γ par γ_1. Il résulte en total, en vertu des relations (5)

$$T_1=20\delta=\text{const.} ,\quad T_2=\frac{20}{3}\rho^2+20\delta^2 ,\quad T_3=40\delta\rho^2+20\delta^3 ,$$
$$T_4=8\rho^4+40\delta^2\rho^2+20\delta^4 .$$

Les théorèmes D et E sont maintenant démontrés pour tous les polyèdres réguliers. Et comme les T_m sont dans tous les cas des polynômes en ρ *à coefficients positifs*, il y a toujours *une seule sphère au plus.*

Le théorème F.

Venons enfin au théorème F. Les points $(0, 0, \pm 1)$, et ceux que nous avons désignés par (x_h, y_h, z_h), sont les pôles sphériques des faces du polyèdre, c'est-à-dire les sommets du polyèdre *réciproque* (le tétraèdre pour le tétraèdre, l'octaèdre pour l'hexaèdre et *vice versa*, l'icosaèdre pour le dodécaèdre et *vice versa*).

Les carrés des distances d'un point (x, y, z) ou (ρ, φ, ψ) aux sommets du polyèdre sont donc respectivement

$$x^2 + y^2 + (z \mp 1)^2 \quad \text{ou} \quad (\rho^2 + 1) \mp 2\rho \sin\psi ,$$

$$(x - x_h)^2 + (y - y_h)^2 + (z - z_h)^2 \quad \text{ou} \quad (\rho^2 + 1) - 2(xx_h + yy_h + zz_h) .$$

Les formules (2) nous permettent de calculer aisément les sommes des premières puissances paires des distances pour les différents polyèdres réguliers; les valeurs de γ trouvées nous donneront les inclinaisons des rayons qui vont aux sommets formant une couronne.

Tétraèdre. — Un sommet au point $(0, 0, -1)$; une couronne de sommets d'ordre 3 avec $\cos\gamma = \frac{1}{3}$, $\sin\gamma = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Désignons en général par V_m la somme des puissances $2m^{\text{ièmes}}$ des distances; on a

$$V_1 = [(\rho^2 + 1) + 2\rho\sin\psi] + [3(\rho^2 + 1) - 6\rho\cos\gamma\sin\psi] = 4(\rho^2 + 1) ,$$

$$V_2 = [(\rho^2 + 1)^2 + 4\rho(\rho^2 + 1)\sin\psi + 4\rho^2\sin^2\psi] +$$
$$+ [3(\rho^2 + 1)^2 - 4\rho(\rho^2 + 1)\, 3\cos\gamma\sin\psi +$$
$$4 \cdot \frac{3}{2}\rho^2(\cos^2\psi\sin^2\gamma + 2\sin^2\psi\cos^2\gamma)] = 4(\rho^2 + 1)^2 + \frac{16}{3}\rho^2 .$$

Hexaèdre. Deux couronnes d'ordre 4 avec

$$\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} , \quad \sin\gamma = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

(les valeurs trouvées pour l'octaèdre). Il résulte, en omettant les termes qui se détruisent mutuellement, et en doublant les autres,

$$\begin{aligned} V_1 &= 8(\rho^2+1) , \\ V_2 &= 8(\rho^2+1)^2 + 16\rho^2(\cos^2\psi \sin^2\gamma + 2\sin^2\psi\cos^2\gamma) = \\ &= 8(\rho^2+1)^2 + \frac{32}{3}\rho^2 , \\ V_3 &= 8(\rho^2+1)^3 + 32\rho^2(\rho^2+1) . \end{aligned}$$

Octaèdre. — Les points (0, 0, $\pm$ 1), et une couronne d'ordre 4 avec $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (la valeur trouvée pour l'hexaèdre). Il résulte, avec les omissions déjà adoptées,

$$\begin{aligned} V_1 &= 2(\rho^2+1) + [4(\rho^2+1) - 8\rho\cos\gamma\cos\psi] = 6(\rho^2+1) , \\ V_2 &= 2[(\rho^2+1)^2 + 4\rho^2\sin^2\psi] + [4(\rho^2+1)^2 - 16\rho(\rho^2+1)\cos\gamma\cos\psi + \\ &\quad + 8\rho^2(\cos^2\psi\sin^2\gamma + 2\sin^2\psi\cos^2\gamma)] = 6(\rho^2+1)^2 + 8\rho^2 , \\ V_3 &= 2[(\rho^2+1)^3 + 12\rho^2(\rho^2+1)\sin^2\psi] + [4(\rho^2+1)^3 + \\ &\quad + 24\rho^2(\rho^2+1)\cos^2\psi] = 6(\rho^2+1)^3 + 24\rho^2(\rho^2+1) . \end{aligned}$$

Dodécaèdre. — Deux couples de couronnes d'ordre 5; les angles γ et γ_1 sont déterminés par les formules trouvées pour l'icosaèdre

$$\sin\gamma = \sqrt{\frac{2(r-1)}{3r}} , \quad \cos\gamma = \sqrt{\frac{r+2}{3r}} ,$$
$$\sin\gamma_1 = \sqrt{\frac{2(r+1)}{3r}} , \quad \cos\gamma_1 = \sqrt{\frac{r-2}{3r}} .$$

En vertu des relations (5), si $P'_{i,r}$ représentent les expressions $P_{i,r}$ où γ est substitué par γ_1, on obtient

$$P_{2,5} + P'_{2,5} = \frac{10}{3}\rho^2 , \quad P_{4,5} + P'_{4,5} = 2\rho^4$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} V_1 &= 20(\rho^2+1) , \\ V_2 &= 20(\rho^2+1)^2 + \frac{80}{3}\rho^2 , \\ V_3 &= 20(\rho^2+1)^3 + 80\rho^2(\rho^2+1) , \\ V_4 &= 20(\rho^2+1)^4 + 160\rho^2(\rho^2+1)^2 + 64\rho^4 . \end{aligned}$$

Icosaèdre. — Les deux points $(0, 0, \pm 1)$, et deux couronnes d'ordre 5 avec la valeur de γ trouvée pour le dodécaèdre, c'est-à-dire

$$\sin \gamma = \frac{2}{r}, \quad \cos \gamma = \frac{1}{r}.$$

Il résulte

$$V_1 = 2(\rho^2 + 1) + 10(\rho^2 + 1) = 12(\rho^2 + 1),$$

$$V_2 = 2[(\rho^2 + 1)^2 + 4\rho^2 \sin^2 \psi] + 2\left[5(\rho^2 + 1)^2 + 10\rho^2\left(\frac{4}{5}\cos^2 \psi + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{2}{5}\sin^2 \psi\right)\right] = 12(\rho^2 + 1)^2 + 16\rho^2,$$

$$V_3 = 2[(\rho^2 + 1)^3 + 12\rho^2(\rho^2 + 1)\sin^2 \psi] + 2\left[5(\rho^2 + 1)^3 + 30\rho^2 \cdot \right.$$
$$\left.(\rho^2 + 1) \cdot \left(\frac{4}{5}\cos^2 \psi + \frac{2}{5}\sin^2 \psi\right)\right] = 12(\rho^2 + 1)^3 + 48\rho^2(\rho^2 + 1),$$

$$V_4 = 2[(\rho^2 + 1)^4 + 24\rho^2(\rho^2 + 1)\sin^2 \psi + 16\rho^4 \sin^4 \psi] + 2\left[5(\rho^2 + 1)^4 + \right.$$
$$\left. + 60\rho^2(\rho^2 + 1)\left(\frac{4}{5}\cos^2 \psi + \frac{2}{5}\sin^2 \psi\right)\right] + 80\left[\frac{6}{25}\cos^4 \psi + \right.$$
$$\left. + \frac{12}{25}\cos^2 \psi \sin^2 \psi + \frac{1}{25}\sin^4 \psi\right] = 12(\rho^2 + 1)^4 + 96\rho^2(\rho^2 + 1)^2 +$$
$$+ \frac{192}{5}\rho^4.$$

Le théorème F est ainsi complètement démontré, et le lieu ne peut se composer que *d'une seule sphère réelle tout au plus.*