

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR QUELQUES THÉORÈMES GÉOMÉTRIQUES DE CHARLES STURM  
**Autor:** Vivanti, G.  
**Kapitel:** II. — Le théorème C.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28596>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Il faut toutefois remarquer que le théorème A ne subsiste pas pour  $m = 1$ . Il résulte en effet

$$\sum_{h=0}^{n-1} d_h = s_1 \rho + n \cos \frac{\pi}{n} = n \cos \frac{\pi}{n},$$

c'est-à-dire :

*La somme (algébrique) des distances d'un point aux côtés d'un polygone régulier est constante pour tous les points du plan.*

## II. — LE THÉORÈME C.

Venons maintenant à la démonstration du théorème C.

Faisons passer l'axe des  $x$  par l'un des sommets du  $n$ -gone; les coordonnées des sommets seront alors

$$\cos \frac{2h\pi}{n}, \quad \sin \frac{2h\pi}{n} \quad (h = 0, 1, \dots, n-1),$$

et les carrés des distances du point  $(x, y)$  ou  $(\rho, \varphi)$  aux sommets seront

$$\begin{aligned} l_h^2 &= \left(x - \cos \frac{2h\pi}{n}\right)^2 + \left(y - \sin \frac{2h\pi}{n}\right)^2 \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho \left(x \cos \frac{2h\pi}{n} + y \sin \frac{2h\pi}{n}\right) \\ &= \rho^2 + 1 - 2\rho \cos \left(-\varphi + \frac{2h\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Il s'en suit :

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \sum_{i=0}^m (-1)^i 2^i s_i \rho^i (\rho^2 + 1)^{m-i}.$$

Or, si  $m < n$ , toutes les sommes  $s_i$  d'indices impairs sont nulles et toutes celles d'indices pairs sont positives; il résulte que  $\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m}$  est un polynôme en  $\rho$  à coefficients positifs et dépendant seulement de  $n$ . L'équation

$$\sum_{h=0}^{n-1} l_h^{2m} = \text{const.} \quad (m < n)$$

a donc tout au plus une racine positive, et le lieu géométrique qu'elle représente est constitué par *une seule* circonférence (réelle) au plus.

*Le théorème C est vrai non seulement pour les puissances paires inférieures à  $n$ , mais même pour celles inférieures à  $2n$ .*

### III. — SUR QUELQUES POLYGONES PLANS ÉQUILATÈRES.

*Losange.* — Prenons comme origine des coordonnées le centre du polygone, et comme axes cartésiens obliques les parallèles à ses côtés; et soit  $\lambda$  l'angle des deux axes. En désignant par  $\delta$  la demi-longueur des côtés, les équations normales des côtés sont

$$\pm x + \delta = 0, \quad \pm y + \delta = 0.$$

Il suit de là

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 \lambda} \sum_{h=0}^3 d_h^2 &= (x + \delta)^2 + (-x + \delta)^2 + (y + \delta)^2 + (-y + \delta)^2 = \\ &= 2(x^2 + y^2 + 2\delta^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^3 \lambda} \sum_{h=0}^3 d_h^3 &= (x + \delta)^3 + (-x + \delta)^3 + (y + \delta)^3 + (-y + \delta)^3 = \\ &= 2\delta[3(x^2 + y^2) + 2\delta^2]. \end{aligned}$$

Les lieux  $\sum_{h=0}^3 d_h^2 = \text{const.}$  et  $\sum_{h=0}^3 d_h^3 = \text{const.}$  sont donc des ellipses, dont les diamètres parallèles aux côtés du losange sont conjugués et ont égale longueur.

Pour tout polygone équilatère ou non, les lieux  $\sum_{h=0}^{n-1} d_h^2 = \text{const.}$  sont des ellipses. En effet, le premier membre est une fonction quadratique de  $x, y$ , qui, par sa nature, ne peut représenter qu'une conique bornée.

Si le polygone a deux axes de symétrie orthogonaux, on vérifie aisément que les lieux  $\sum_{h=0}^{n-1} d_h^3$  sont aussi des ellipses.

Pour tout polygone équilatère la somme des distances d'un point aux côtés est constante pour tous les points du plan.