Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CERCLES FOCAUX DES CONIQUES
Autor: Lebesgue, Henri
Kapitel: 6. — Nature des courbes C, lorsque k est différent de 1.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28584

On passe d'un cercle focal, soit γ *de centre* ω *sur* Ox, *à un cercle* γ_1 *de la même série en remarquant qu'au déplacement* $\overline{\omega\omega_1}$ *du centre correspond le déplacement* $\overline{\mathrm{dd}_1}$ *de la droite directrice, tel que*

$$k\,\overline{dd_1} = \overline{\omega\omega_1} \tag{14}$$

et que l'axe radical de γ *et* γ_1 *est la droite équidistante de* d *et de* d_1.

On passe aux cercles focaux de l'autre série en considérant les cercles définis par

$$\mathcal{P}(\mathrm{M}, \gamma) = k\,\overline{\mathrm{MH}}^2 \; ; \tag{10}$$

H *étant un point quelconque de la droite directrice* d *du cercle* γ.

6. — NATURE DES COURBES $\mathcal{C}$, LORSQUE k EST DIFFÉRENT DE 1.

Il sera démontré que $\mathcal{C}$ est une conique à centre si nous trouvons un cercle focal de rayon nul.

Γ sera de rayon nul, si cette circonférence est réduite à son centre, c'est-à-dire est le second cercle point du faisceau γ, H; donc si l'on a :

$$\overline{\omega\Omega} \cdot \overline{\omega\mathrm{H}} = r^2 \, .$$

Ainsi, Ω devra être à la rencontre de Oy et du cercle δ inverse de d, γ étant le cercle d'inversion. Si δ coupe Oy, leurs points de rencontre sont des centres de cercles Γ de rayon nul; $\mathcal{C}$ est une conique d'axe focal Oy.

Or δ a pour diamètre

$$\frac{r^2}{\overline{\omega d}} \, ,$$

et, d'après (12),

$$\overline{\omega\mathrm{O}} = \mathrm{K}\,\overline{\omega d} \, ,$$

donc $\mathcal{C}$ *est une conique d'axe focal* $\mathrm{O}y$ *si l'on a :*

$$\mathrm{K} > 0 \, , \qquad r^2 > \mathrm{K}\,\overline{\omega d}^2 \; ; \tag{15}$$

$\mathcal{C}$ *est une conique d'axe focal* Ox *si l'on a :*

$$k > 0 \, , \qquad \mathrm{R}^2 > k\,\overline{\Omega\mathrm{D}}^2 \, . \tag{16}$$

Si k *est négatif*, K est, d'après (13), compris entre 0 et 1; la première inégalité (15) est remplie, la seconde s'écrit encore, $1 - k$ étant positif,

$$(1 - k)r^2 > - k\overline{\omega d}^2 .$$

Si elle n'était pas vérifiée, on aurait

$$r^2 + k(\overline{\omega d}^2 - r^2) < 0 ;$$

ce qui exigerait, puisque k est négatif,

$$\omega d > r \qquad \text{et} \qquad k(\overline{\omega d}^2 - r^2) + r^2 < 0 ,$$

c'est-à-dire les deux inégalités (9), lesquelles ne sauraient être vérifiées à la fois, $\mathcal{C}$ étant réelle.

Donc, pour k < 0, $\mathcal{C}$ *est une ellipse d'axe focal* Oy, et l'on a une conclusion analogue pour K < 0.

Si k *et* K *sont tous deux positifs*, il n'y a plus lieu de tenir compte des conditions (9), qui ne peuvent être vérifiées simultanément que pour $k < 0$. D'après (13), on a alors $k > 1$, K > 1.

Ecrivons la relation (3) pour les trois cercles γ, Γ et H, et en prenant M au point H, il vient

$$\overline{\mathrm{H}\Omega}(\overline{\mathrm{H}\omega}^2 - r^2) + \overline{\omega\mathrm{H}}(\overline{\mathrm{H}\Omega}^2 - \mathrm{R}^2) = 0 ,$$

où, d'après (11), (12), (13),

$$\mathrm{K}(\overline{\mathrm{H}\omega}^2 - r^2) + k(\overline{\mathrm{H}\Omega}^2 - \mathrm{R}^2) = 0 .$$

Les relations entre longueurs

$$\mathrm{H}\omega^2 = \omega d^2 + \mathrm{OD}^2 , \qquad \mathrm{H}\Omega^2 = \Omega\mathrm{D}^2 + od^2 ,$$

$$\left|\frac{k}{\mathrm{K}}\right| = \frac{\mathrm{H}\omega}{\mathrm{H}\Omega} = \frac{\omega d}{od} = \frac{\mathrm{OD}}{\Omega\mathrm{D}} ,$$

transforment l'égalité précédente en

$$\mathrm{K}[\mathrm{K}\omega d^2 - r^2] + k[k\Omega\mathrm{D}^2 - \mathrm{R}^2] = 0 ,$$

ce qui prouve que les deux quantités entre crochets sont de signes contraires. Donc l'un ou l'autre des systèmes d'inégalités (15) ou (16) est vérifiée; $\mathcal{C}$ *est une hyperbole.*

Un cas particulier vaut d'être signalé; c'est celui où les deux crochets seraient nuls. Alors le cercle δ serait tangent à Oy en O; pour D confondu avec Ox, Γ se réduirait au point O et la relation $\overline{MO}^2 = K\,\overline{MD}^2$ montre que $\mathcal{C}$ est une hyperbole réduite à ses asymptotes. On laissera de côté ce cas limite dans la suite.

7. — Nature des courbes $\mathcal{C}$ lorsque k égale 1.

Pour éviter des complications de rédaction, on a supposé $k \neq 1$ depuis le § 5; pourtant l'étude des courbes $\mathcal{C}$ paraboliques peut être faite par les procédés des deux paragraphes précédents, seulement la lettre Γ désignera maintenant l'axe radical du faisceau H, γ. Il suffira donc de montrer que la marche de l'étude pour $k = 1$ pourrait être parallèle à celle de l'étude déjà faite.

La relation (1) donne pour tout point M_1 du plan

$$\mathcal{P}(M_1, \gamma) - \mathcal{P}(M_1, H) + 2\,\overline{\omega H} \cdot \overline{M_1\Gamma} = 0 ,$$

ce qui s'écrit encore:

$$\mathcal{P}(M_1, \gamma) - \overline{M_1 d}^2 = \overline{M_1 D}^2 - 2\,\overline{\omega H} \cdot \overline{M_1 \Gamma} .$$

Or $\mathcal{C}$ est le lieu des points M_1 pour lequel le premier membre est nul, *donc $\mathcal{C}$ est aussi le lieu des points M_1 tels que l'on ait:*

$$\overline{M_1 D}^2 - 2\,\overline{\omega H} \cdot \overline{M_1 \Gamma} = 0 ; \tag{17}$$

ou si l'on veut:

$$\sin\psi \cdot \overline{M_1 D}^2 - 2\,\overline{\omega d_0} \cdot \overline{M_1 \Gamma} = 0 , \tag{17'}$$

ψ étant l'angle de Γ et de ωx.

Réciproquement, on déduira de l'équation (17) des cercles focaux ayant leurs centres sur ωx; γ est l'un d'eux. Les relations entre la série des droites Γ et celle des cercles focaux sont les mêmes que précédemment, seulement la relation (14) s'est simplifiée; devenue

$$\overline{\omega\omega_1} = \overline{dd_1} \tag{14'}$$

elle exprime la propriété déjà énoncée: la sous-normale est constante.