

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES CERCLES FOCAUX DES CONIQUES  
**Autor:** Lebesgue, Henri  
**Kapitel:** 6. — Nature des courbes C, lorsque k est différent de 1.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28584>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 20.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

On passe d'un cercle focal, soit  $\gamma$  de centre  $\omega$  sur  $Ox$ , à un cercle  $\gamma_1$  de la même série en remarquant qu'au déplacement  $\overline{\omega\omega_1}$  du centre correspond le déplacement  $\overline{dd_1}$  de la droite directrice, tel que

$$k \overline{dd_1} = \overline{\omega\omega_1} \quad (14)$$

et que l'axe radical de  $\gamma$  et  $\gamma_1$  est la droite équidistante de  $d$  et de  $d_1$ .

On passe aux cercles focaux de l'autre série en considérant les cercles définis par

$$\mathcal{F}(M, \gamma) = k \overline{MH}^2 ; \quad (10)$$

$H$  étant un point quelconque de la droite directrice  $d$  du cercle  $\gamma$ .

## 6. — NATURE DES COURBES $\mathcal{C}$ , LORSQUE $k$ EST DIFFÉRENT DE 1.

Il sera démontré que  $\mathcal{C}$  est une conique à centre si nous trouvons un cercle focal de rayon nul.

$\Gamma$  sera de rayon nul, si cette circonférence est réduite à son centre, c'est-à-dire est le second cercle point du faisceau  $\gamma, H$ ; donc si l'on a :

$$\overline{\omega\Omega} \cdot \overline{\omega H} = r^2 .$$

Ainsi,  $\Omega$  devra être à la rencontre de  $Oy$  et du cercle  $\delta$  inverse de  $d$ ,  $\gamma$  étant le cercle d'inversion. Si  $\delta$  coupe  $Oy$ , leurs points de rencontre sont des centres de cercles  $\Gamma$  de rayon nul;  $\mathcal{C}$  est une conique d'axe focal  $Oy$ .

Or  $\delta$  a pour diamètre

$$\frac{r^2}{\overline{\omega d}} ,$$

et, d'après (12),

$$\overline{\omega O} = K \overline{\omega d} ,$$

donc  $\mathcal{C}$  est une conique d'axe focal  $Oy$  si l'on a :

$$K > 0 , \quad r^2 > K \overline{\omega d}^2 ; \quad (15)$$

$\mathcal{C}$  est une conique d'axe focal  $Ox$  si l'on a :

$$k > 0 , \quad R^2 > k \overline{\Omega D}^2 . \quad (16)$$

Si  $k$  est négatif,  $K$  est, d'après (13), compris entre 0 et 1; la première inégalité (15) est remplie, la seconde s'écrit encore,  $1 - k$  étant positif,

$$(1 - k)r^2 > -k\overline{\omega d}^2.$$

Si elle n'était pas vérifiée, on aurait

$$r^2 + k(\overline{\omega d}^2 - r^2) < 0;$$

ce qui exigerait, puisque  $k$  est négatif,

$$\omega d > r \quad \text{et} \quad k(\overline{\omega d}^2 - r^2) + r^2 < 0,$$

c'est-à-dire les deux inégalités (9), lesquelles ne sauraient être vérifiées à la fois,  $\mathcal{C}$  étant réelle.

Donc, pour  $k < 0$ ,  $\mathcal{C}$  est une ellipse d'axe focal  $Oy$ , et l'on a une conclusion analogue pour  $K < 0$ .

Si  $k$  et  $K$  sont tous deux positifs, il n'y a plus lieu de tenir compte des conditions (9), qui ne peuvent être vérifiées simultanément que pour  $k < 0$ . D'après (13), on a alors  $k > 1$ ,  $K > 1$ .

Ecrivons la relation (3) pour les trois cercles  $\gamma$ ,  $\Gamma$  et  $H$ , et en prenant  $M$  au point  $H$ , il vient

$$\overline{H\Omega}(\overline{H\omega}^2 - r^2) + \overline{\omega H}(\overline{H\Omega}^2 - R^2) = 0,$$

où, d'après (11), (12), (13),

$$K(\overline{H\omega}^2 - r^2) + k(\overline{H\Omega}^2 - R^2) = 0.$$

Les relations entre longueurs

$$H\omega^2 = \omega d^2 + OD^2, \quad H\Omega^2 = \Omega D^2 + od^2,$$

$$\left| \frac{k}{K} \right| = \frac{H\omega}{H\Omega} = \frac{\omega d}{od} = \frac{OD}{\Omega D},$$

transforment l'égalité précédente en

$$K[K\omega d^2 - r^2] + k[k\Omega D^2 - R^2] = 0,$$

ce qui prouve que les deux quantités entre crochets sont de signes contraires. Donc l'un ou l'autre des systèmes d'inégalités (15) ou (16) est vérifiée;  $\mathcal{C}$  est une hyperbole.

Un cas particulier vaut d'être signalé; c'est celui où les deux crochets seraient nuls. Alors le cercle  $\delta$  serait tangent à  $Oy$  en  $O$ ; pour  $D$  confondu avec  $Ox$ ,  $\Gamma$  se réduirait au point  $O$  et la relation  $\overline{MO}^2 = K \overline{MD}^2$  montre que  $\mathcal{C}$  est une hyperbole réduite à ses asymptotes. On laissera de côté ce cas limite dans la suite.

# 7. — NATURE DES COURBES $\mathcal{C}$ LORSQUE $k$ ÉGALE 1.

Pour éviter des complications de rédaction, on a supposé  $k \neq 1$  depuis le § 5; pourtant l'étude des courbes  $\mathcal{C}$  paraboliques peut être faite par les procédés des deux paragraphes précédents, seulement la lettre  $\Gamma$  désignera maintenant l'axe radical du faisceau  $H, \gamma$ . Il suffira donc de montrer que la marche de l'étude pour  $k = 1$  pourrait être parallèle à celle de l'étude déjà faite.

La relation (1) donne pour tout point  $M_1$  du plan

$$\mathcal{P}(M_1, \gamma) - \mathcal{P}(M_1, H) + 2 \overline{\omega H} \cdot \overline{M_1 \Gamma} = 0 ,$$

ce qui s'écrit encore:

$$\mathcal{P}(M_1, \gamma) - \overline{M_1 d}^2 = \overline{M_1 D}^2 - 2 \overline{\omega H} \cdot \overline{M_1 \Gamma} .$$

Or  $\mathcal{C}$  est le lieu des points  $M_1$  pour lequel le premier membre est nul, donc  $\mathcal{C}$  est aussi le lieu des points  $M_1$  tels que l'on ait:

$$\overline{M_1 D}^2 - 2 \overline{\omega H} \cdot \overline{M_1 \Gamma} = 0 ; \tag{17}$$

ou si l'on veut:

$$\sin \psi \cdot \overline{M_1 D}^2 - 2 \overline{\omega d} \cdot \overline{M_1 \Gamma} = 0 , \tag{17'}$$

$\psi$  étant l'angle de  $\Gamma$  et de  $\omega x$ .

Réciproquement, on déduira de l'équation (17) des cercles focaux ayant leurs centres sur  $\omega x$ ;  $\gamma$  est l'un d'eux. Les relations entre la série des droites  $\Gamma$  et celle des cercles focaux sont les mêmes que précédemment, seulement la relation (14) s'est simplifiée; devenue

$$\overline{\omega \omega_1} = \overline{d d_1} \tag{14'}$$

elle exprime la propriété déjà énoncée: la sous-normale est constante.