Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 37 (1938)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: CHARLES STURM ET SON ŒUVRE MATHÉMATIQUE1 (1803-1855)
Autor: Loria, Gino
Kapitel: II. — Recherches de Géométrie.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28595

matiques (t. XIII, p. 145-162). La même remarque doit être répétée au sujet de la solution, ayant aussi deux pères [2], de la question de déterminer, en fonction des côtés d'un quadrilatère inscriptible, les angles formés par ses côtés opposés et par ses diagonales.

La personnalité de Sturm se dévoile plus clairement dans les démonstrations [4] de deux théorèmes relatifs à la rectification de la lemniscate énoncés par Talbot: elles prouvent les connaissances vastes du jeune auteur sur l'analyse infinitésimale. Un autre article [8] se rapporte à la détermination de l'équation d'une surface, qui est un cylindre du troisième degré; tandis que le suivant [9] donne la solution d'un problème proposé par Sturm lui-même: il appartient à la Mécanique (et précisément au mouvement d'un fil pesant) et doit être remarqué comme la première contribution donnée par Sturm à une branche de mathématiques dont il devait s'occuper, on peut dire, toute sa vie (comp. n. 16). Ensuite notre jeune mathématicien commence à jouer un rôle plus personnel en proposant (*A. M.*, t. XIV, p. 28) la recherche du lieu des points dans le plan d'un triangle jouissant de la propriété que les pieds des perpendiculaires abaissées sur ses côtés forment un second triangle d'aire donnée; non seulement il a effectué lui-même cette recherche [7], mais il a remarqué, sans toutefois le prouver, que la question analogue relative à un polygone quelconque mène, non à un cercle, mais à une section conique; au contraire il prouve [10] que sa solution citée mène tout naturellement à la relation $D^2 = r^2 - 2rr'$ qui a lieu entre les rayons r et r' des cercles inscrit et circonscrit à un triangle et la distance D entre leurs centres. Notons seulement en passant les démonstrations [11] données par lui de quatre théorèmes relatifs à l'hyperbole, car elles sont mêlées à celles d'autres collaborateurs des *Annales*.

II. — Recherches de Géométrie.

3. — Nous nous sommes arrêtés à ces premiers travaux, non à cause de leur importance, mais pour faire connaître à nos lecteurs les premiers pas d'une marche glorieuse. Les démons-

trations analytiques que Sturm donna [6] de théorèmes qu'il avait découverts lui-même ont une valeur plus grande. Voici les énoncés de ces théorèmes:

I. « Soit dans l'espace un polygone rectiligne fermé quelconque, plan ou gauche, de n côtés ABC ... LMN et une droite indéfinie, aussi quelconque. Soient menés par cette droite et par les n sommets du polygone un pareil nombre de plans; chacun d'eux par ses $n - 2$ intersections avec les côtés du polygone non adjacents au sommet qui s'y trouve contenu, déterminera sur chacun de ces côtés deux segments comptés de cette intersection aux deux extrémités de ce côté. Or si l'on forme les produits des segments déterminés sur les côtés consécutifs AB, BC, CD, ..., LM, MN, NA à partir des sommets A, B, C, ..., L, M, N respectivement, lesquels sont au nombre de $n(n - 2)$, ce produit se trouve égal à celui des segments restant déterminés sur les mêmes côtés à partir des sommets B, C, D, ..., M, N, A respectivement, lesquels sont aussi au nombre de $n(n - 2)$. »

II. « Etant donné le même polygone considéré ci-dessus et un point quelconque de l'espace, soient menés par ce point et par les n côtés du polygone un pareil nombre de plans. Chacun de ces plans, par ses $n - 3$ intersections avec les côtés du polygone, autres que celui qui s'y trouve contenus et les deux autres que celui qui s'y trouve situé, déterminera sur chacun de ces $n - 3$ côtés deux segments comptés de cette intersection aux deux extrémités de ce côté. Or si l'on forme le produit des segments déterminés sur les côtés consécutifs AB, BC, CD, ..., LM, MN, NA à partir des sommets A, B, C, ..., L, M, N respectivement, ce produit se trouve égal à celui des segments respectifs restants, déterminés sur ces mêmes côtés à partir des points B, C, D, ..., M, N, A respectivement. »

Est-il nécessaire de remarquer que ces théorèmes appartiennent à un chapitre de la Géométrie qui était à l'ordre du jour dans le premier quart du XIX^{e} siècle ? Sturm continua à s'occuper des polygones — et précisément des polygones réguliers — à l'occasion d'un théorème énoncé par son maître L'Huillier dans la *Bibliothèque universelle* de Genève.

En effet, dans un autre mémoire [13] il établit les propositions suivantes: « Le lieu des points du plan d'un polygone régulier de n côtés desquels abaissant des perpendiculaires sur les directions de ces côtés la somme des $2m$-ièmes puissances des longueurs de ces perpendiculaires est constante, est une circonférence concentrique au polygone toutes les fois que le degré m est inférieur à n ». Ce remarquable résultat appartient à Sturm lui-même qui, après l'avoir établi, remarqua l'étrange condition $m < n$; lorsqu'elle n'est pas remplie, le lieu est tout à fait différent du cercle. Ensuite il prouva, d'après L'Huillier, que, étant donné un polygone régulier d'un nombre quelconque de côtés, on arrive encore à une circonférence concentrique au polygone lorsqu'on considère le lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées sur ses côtés, soit les sommets d'un polygone d'aire constante et que la même chose doit se répéter lorsqu'on suppose constante la somme des carrés des côtés du polygone résultant. Le mémoire finit par cet autre énoncé: « Une circonférence concentrique à un polygone régulier donné de n côtés est le lieu géométrique des points de chacun desquels menant des droites à ses sommets, la somme des $2m$-ièmes puissances des longueurs de ces droites est une grandeur constante, pourvu qu'on ait $2m < n$ » [1].

4. — Les polygones plans et gauches généraux (c'est-à-dire ne jouissant d'aucune particularité) sont le sujet d'un autre travail de Sturm [14] où l'analyse de Descartes est savamment appliquée. Le point de départ choisi par l'auteur est un système de formules qui servent à relier les coordonnées orthogonales (x_i, y_i, z_i) des sommets d'un polygone quelconque de n côtés aux longueurs r_i des côtés et aux angles α_i, β_i, γ_i qu'ils forment avec un système d'axes coordonnés; il s'agit des formules suivantes:

$$x_i = x_{i+1} + r_{i+1} \cos \alpha_{i+1}, \qquad y_i = y_{i+1} + r_{i+1} \cos \beta_{i+1},$$
$$z_i = z_{i+1} + r_{i+1} \cos \gamma_{i+1} \qquad (\text{ou } i = 1, 2, 3, \ldots, n-1, n).$$

Les applications se rapportent en partie à la géométrie, mais aussi à la mécanique et cela pour arriver à établir des propositions

[1] Ces théorèmes mériteraient une étude approfondie du point de vue des mathématiques modernes.

énoncées auparavant dans les *Annales;* il faut encore signaler la voie nouvelle et lumineuse par laquelle Sturm arrive aux formules de transformation des coordonnées cartésiennes obliques et d'autres considérations qu'on pourrait bien utiliser encore dans l'enseignement de la géométrie analytique, au moins comme source de questions intéressantes.

5. — L'analogie des sujets nous a obligés à abandonner dans notre exposé l'ordre chronologique; en effet, Sturm avait auparavant publié dans les *A. M.* un remarquable article [5] se rapportant à la théorie des *maxima* et *minima*, ayant pour but de généraliser des résultats publiés en différents endroits du recueil cité. A cet effet il établit, par des calculs d'une élégance parfaite, le théorème général suivant: « Soient p, p', p'', ... les distances d'un point M à des points fixes dans l'espace; q, q', q'', ... les distances du même point à des points mobiles sur des lignes fixes; enfin r, r' r'', ... ses distances à des points mobiles sur des surfaces fixes. Supposons que ce point M soit choisi dans l'espace de façon qu'une fonction déterminée u des distances p, p', p'', ... q, q', q'', ..., r, r', r'', ... soit un *maximum* ou un *minimum* et concevons ce même point sollicité, suivant les directions de ces distances, par des forces proportionnelles aux valeurs actuelles des dérivées partielles de u prises par rapport à ces mêmes distances; alors: 1° Les droites q, q', q'', ..., r, r', r'', ... seront respectivement normales aux lignes et surfaces où elles se terminent; 2° Si le point M est parfaitement libre dans l'espace, il devra se trouver en équilibre sous l'action des forces que nous avons supposé le solliciter; et s'il est assujetti à se trouver sur une surface ou sur une ligne donnée, la résultante de ces mêmes forces, lorsqu'elle ne sera pas nulle, devra être normale à cette surface ou à cette ligne; de sorte qu'on pourra dire que le point M est en équilibre ».

6. — L'auteur — pas encore illustre — s'appliqua plus tard à un chapitre de l'Optique géométrique, qui était alors en état de développement: la théorie des caustiques [12]. Dans le premier mémoire qu'il consacra à ce sujet il démontra que, lorsque le miroir est un cercle qui se trouve dans le plan qui contient la

source lumineuse, les rayons réfractés sont normaux à une courbe telle que les distances d'un quelconque de ses points à deux points fixes multipliés par des coefficients constants donnent une somme aussi constante (on sait qu'il s'agit des *ovales de Descartes*). De cette manière Sturm donna une première confirmation à l'idée de Gergonne qu'il y a avantage à considérer, non les caustiques elles-mêmes, mais leurs développées (ce sont les courbes que Quetelet appela plus tard « caustiques secondaires »).

Or, pendant que Sturm s'occupait de cette théorie, un autre jeune homme, destiné à devenir une des gloires de la Belgique, A. Quetelet, faisait accomplir à la même question un progrès de premier ordre, qui apportait une confirmation éclatante aux vues de Gergonne, et s'empressait d'en faire part au directeur des *Annales de Mathématiques*. Celui-ci, de son côté, la communiquait oralement à son ami P. F. Sarrus, professeur à l'Université de Strasbourg. De cet entretien sortit l'article ayant comme titre *Recherches d'analise* (sic) *sur les caustiques planes*, que Gergonne publia dans le t. XV (p. 345-358) des *Annales*, où, entre autre, il établit le théorème suivant (et l'analogue relatif à la réflexion): « La caustique par réfraction, pour une courbe plane quelconque, séparatrice de deux milieux, et pour des rayons incidents normaux à une autre courbe quelconque, située dans le même plan que celle-là, est la développée de l'enveloppe de tous les cercles qui ont leurs centres sur la courbe séparatrice, et dont les rayons sont aux distances de ces mêmes centres à la courbe à laquelle tous les rayons incidents sont normaux, dans le rapport constant du sinus de réfraction au sinus d'incidence ». De ce théorème, démontré analytiquement, Gergonne fit plusieurs applications dans ses *Recherches d'analise* (sic) *sur les surfaces caustiques* (*Annales*, t. XVI, p. 1-19) qui en confirmèrent la fécondité. Frappé par la beauté de ces résultats, Sturm reprit ses recherches sur les caustiques [15] en prenant comme point de départ le théorème principal de Gergonne, qu'il préféra énoncer sous la forme suivante: « A chaque trajectoire orthogonale des rayons incidents, il répond toujours une trajectoire orthogonale des rayons réfractés, telle que, de quelque point de la courbe séparatrice des deux milieux que l'on mène des normales aux deux trajectoires, les longueurs de ces normales seront respectivement entre elles dans le rapport constant du sinus d'incidence au sinus de réflexion ». Or Sturm, par des calculs simples et d'une parfaite élégance, non seulement démontra rigoureusement des formules d'optique géométrique que Jean Bernoulli avait établis par des considérations infinitésimales, mais il établit une propriété remarquable relative à la rectification des caustiques, qu'il énonça comme il suit: « Si on suppose que la caustique des rayons incidents soit rectifiable et que la courbe séparatrice soit algébrique, la caustique des rayons réfractés sera également algébrique et rectifiable ». On déduit de cela que, en particulier, si des rayons incidents parallèles ou émanés d'un même point et compris dans un même plan, subissent une suite de réflexions et de réfractions, à la rencontre de courbes algébriques quelconques, situées dans ce plan, les caustiques auxquelles ils donneront naissance, depuis la première jusqu'à la dernière, seront toutes algébriques et rectifiables.

7. — Depuis ce moment Sturm abandonna l'Optique géométrique à laquelle il devait revenir plus tard (voyez n. 17) et fournit aux *Annales* une dernière contribution, relative à une branche des mathématiques à laquelle il donnait alors un adieu définitif: la vieille et inépuisable théorie des coniques [16 et 17]. Le travail dont il s'agit embrasse deux parties; une troisième a été trouvée parmi ses papiers après sa mort, mais elle n'a jamais été publiée. Dans la première partie, il esquissa une théorie de la polarité par rapport à une courbe du second ordre différente de celle en usage alors, car elle a son point de départ dans la considération des ∞' coniques qui passent par quatre points fixes; à remarquer plusieurs constructions relatives, obtenues en employant seulement la règle (condition qui était alors de mode). Or la dite considération a permis à notre géomètre d'arriver (dans la deuxième partie de son travail) à un résultat entièrement nouveau et qui, grâce à son importance, entra tout de suite dans l'ensemble des propositions fondamentales de la théorie des sections coniques; c'est la proposition qui apprend que toutes les lignes du second ordre qui passent par quatre points fixes déterminent une involution sur une transversale arbitraire située dans leur plan. L'importance de ce résultat n'a pas échappé à

CHARLES STURM

1803–1855

vide-leer-empty

Sturm, qui en déduisit une foule de conséquences, parmi lesquelles on ne doit pas oublier des constructions d'une élégance parfaite. Tout cela fait regretter que la dernière partie de ce travail n'ait jamais vu le jour (Liouville au moment de la mort de Sturm s'était engagé à le publier); on sait seulement [1] qu'on y trouvait la démonstration du théorème suivant corrélatif à celui que nous avons cité: Quand un quadrilatère est circonscrit à une conique, les droites menées d'un point quelconque à ses quatre sommets et les tangentes menées de ce point à la courbe, forment un faisceau en involution.

III. — Suite de la biographie de Sturm.

8. — Un an après son premier séjour à Paris, Sturm y revient avec son ami d'enfance Daniel Colladon, avec lequel il vit et travailla plusieurs années: c'est à cette collaboration que doit la vie le *Mémoire sur la compression des liquides*, auquel l'Académie des Sciences décerna (11 juin 1827) le Grand Prix des Sciences mathématiques [2]. Pendant la période 1825-29 Sturm fut encore obligé pour vivre à se vouer à l'enseignement privé, une chaire publique lui étant impossible car il était de religion protestante. Dans cette période économiquement difficile, il fut puissamment aidé par Arago, grâce auquel il fut admis dans le petit cercle qui se réunissait alors autour de Fourier, qui aimait à initier des jeunes auditeurs à ses propres recherches. C'est en subissant l'influence de cet éminent savant que Sturm dirigea ses efforts sur la Théorie mathématique de la chaleur et sur la Théorie générale des équations algébriques; mais c'est au cours d'investigations sur les propriétés d'une classe d'équations différentielles qu'il fit la découverte de son célèbre théorème. Cette proposition fut communiquée à l'Académie des sciences dans la séance du 13 mai 1829, elle fut publiée en résumé dans le *Bulletin*

---

[1] M. Chasles, *Aperçu historique, etc.*, II éd. (Paris, 1875), p. 341.

[2] Les deux jeunes savants firent sur ce sujet des expériences sur le lac de Genève: comp. *La science, ses progrès, ses applications* (Paris, Larousse), t. I, p. 17.