

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES CERCLES FOCAUX DES CONIQUES  
**Autor:** Lebesgue, Henri  
**Kapitel:** 5. — Cercles bitangents, cercles focaux.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28584>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 23.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Pour  $k \neq 1$ , on a, d'après (11),

$$\frac{\overline{Mn}}{\overline{M\Omega}} = \frac{\overline{H\omega}}{\overline{H\Omega}} = 1 + \frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{H\Omega}} = 1 - k ;$$

donc, les deux axes  $Ox, Oy$  d'une courbe  $\mathcal{C}$  à centre déterminent sur toute normale à cette courbe deux segments  $\overline{Mn}, \overline{M\Omega}$  dont le rapport est constant et égal à  $1 - k$ .

### 5. — CERCLES BITANGENTS, CERCLES FOCAUX.

Soit  $k \neq 1$ ; à toute parallèle  $D$  à  $\omega x$ , coupant  $d$  en  $H$ , nous associons un cercle  $\Gamma$  grâce à la relation (10), toutes les fois du moins que cette relation donne un lieu ou un point. Ce cercle  $\Gamma$ , qui peut donc être un cercle point<sup>1</sup>, est appelé un *cercle focal*, dont  $D$  est dite la *droite directrice*. Dans les cas où  $D$  et  $\Gamma$  se coupent,  $\Gamma$  est un cercle *bitangent* à  $\mathcal{C}$ .

Soit  $M_1$  un point quelconque, comme (11) et (12) donnent:

$$\frac{\overline{\Omega H}}{1} = \frac{\overline{H\omega}}{k-1} = \frac{\overline{\omega\Omega}}{-k} ,$$

la relation (3) appliquée aux trois cercles  $\gamma, \Gamma, H$  d'un même faisceau s'écrit:

$$\mathcal{R}(M_1, \gamma) + (k-1) \cdot \mathcal{R}(M_1, \Gamma) - k \mathcal{R}(M_1, H) = 0 ,$$

ou, exprimant  $\mathcal{R}(M_1, H)$  à l'aide de  $M_1d$  et  $M_1D$ ,

$$[\mathcal{R}(M_1, \gamma) - k \overline{M_1d}^2] + (k-1) \left[ \mathcal{R}(M_1, \Gamma) - \frac{k}{k-1} \overline{M_1D}^2 \right] = 0 .$$

Donc, la courbe  $\mathcal{C}$  est susceptible d'être définie à partir de chaque couple  $\Gamma, D$  par la relation:

$$\mathcal{R}(M_1, \Gamma) = K \overline{M_1D}^2 ,$$

dans laquelle on a posé:

$$K = \frac{k}{k-1} , \quad \text{ou} \quad \frac{1}{K} + \frac{1}{k} = 1 .$$

<sup>1</sup> On pourrait même sans grande difficulté parler ici de cercles imaginaires à centres réels.

Le passage d'un cercle  $\Gamma$  de centre  $\Omega$  et d'une droite  $D$  de pied  $H$  à un cercle  $\Gamma_1$  de centre  $\Omega_1$  et à une droite  $D_1$  de pied  $H_1$  est immédiat, que ce soit  $\Omega_1$  ou  $H_1$  qui soit donné. En effet,  $\Omega H$  et  $\Omega_1 H_1$  passant par  $\omega$ , on a:

$$\frac{\overline{\Omega\Omega_1}}{\overline{HH_1}} = \frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{H\omega}} = \frac{k}{k-1} = K ;$$

d'autre part, l'axe radical  $\Delta$  de  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  est parallèle à  $\omega x$  et passe par le point de rencontre des axes radicaux de  $\Gamma$  avec  $\gamma$  et de  $\Gamma_1$  avec  $\gamma$ . Mais ceux-ci sont aussi les axes radicaux de  $\gamma$  avec  $H$  et de  $\gamma$  avec  $H_1$ , donc  $\Delta$  est l'axe radical de  $H$  avec  $H_1$ , c'est-à-dire la médiatrice de  $HH_1$ .

Faisons jouer maintenant à  $\Gamma$ ,  $D$ ,  $K$  les rôles que jouaient tout d'abord  $\gamma$ ,  $d$ ,  $k$  et cherchons l'intersection de  $\mathcal{C}$  et de  $d$ . Il nous faudra construire la circonference définie par

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) = K \overline{MH}^2. \quad (10')$$

Or, comme l'on a, d'après (3),

$$\overline{\Omega H} \mathcal{P}(M, \gamma) + \overline{H\omega} \mathcal{P}(M, \Gamma) + \overline{\omega\Omega} \overline{MH}^2 = 0 ,$$

ou

$$\overline{\Omega H} \mathcal{P}(M, \gamma) + \overline{H\omega} [\mathcal{P}(M, \Gamma) - K \overline{MH}^2] = 0 ,$$

la circonference à construire est donc  $\gamma$ .

Ainsi le procédé qui, de  $d$ ,  $\gamma$ ,  $k$ , nous a permis de passer à  $D$ ,  $\Gamma$ ,  $K$ , permet aussi de revenir des circonférences  $\Gamma$  à une famille de circonférences centrées sur  $Ox$  et dont  $\gamma$  fait partie.

En résumé: *toute courbe  $\mathcal{C}$  à centre est susceptible d'une double infinité de définitions comme lieu des points dont le quotient de la puissance par rapport à un cercle focal par le carré de la distance à une droite directrice est constant. Les centres des cercles focaux sont sur les deux axes de  $\mathcal{C}$  auxquels les droites directrices sont respectivement perpendiculaires. A tous les cercles ayant leurs centres sur  $Ox$  correspond la même constante  $k$ , à tous ceux ayant leurs centres sur  $Oy$  correspond la même constante  $K$ ; on a*

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{K} = 1 . \quad (13)$$

On passe d'un cercle focal, soit  $\gamma$  de centre  $\omega$  sur  $Ox$ , à un cercle  $\gamma_1$  de la même série en remarquant qu'au déplacement  $\overline{\omega\omega_1}$  du centre correspond le déplacement  $\overline{dd_1}$  de la droite directrice, tel que

$$k \overline{dd_1} = \overline{\omega\omega_1} \quad (14)$$

et que l'axe radical de  $\gamma$  et  $\gamma_1$  est la droite équidistante de  $d$  et de  $d_1$ .

On passe aux cercles focaux de l'autre série en considérant les cercles définis par

$$\mathcal{P}(M, \gamma) = k \overline{MH}^2 ; \quad (10)$$

$H$  étant un point quelconque de la droite directrice  $d$  du cercle  $\gamma$ .

## 6. — NATURE DES COURBES $\mathcal{C}$ , LORSQUE $k$ EST DIFFÉRENT DE 1.

Il sera démontré que  $\mathcal{C}$  est une conique à centre si nous trouvons un cercle focal de rayon nul.

$\Gamma$  sera de rayon nul, si cette circonférence est réduite à son centre, c'est-à-dire est le second cercle point du faisceau  $\gamma, H$ ; donc si l'on a:

$$\overline{\omega\Omega} \cdot \overline{\omega H} = r^2 .$$

Ainsi,  $\Omega$  devra être à la rencontre de  $Oy$  et du cercle  $\delta$  inverse de  $d$ ,  $\gamma$  étant le cercle d'inversion. Si  $\delta$  coupe  $Oy$ , leurs points de rencontre sont des centres de cercles  $\Gamma$  de rayon nul;  $\mathcal{C}$  est une conique d'axe focal  $Oy$ .

Or  $\delta$  a pour diamètre

$$\frac{r^2}{\overline{\omega d}} ,$$

et, d'après (12),

$$\overline{\omega O} = K \overline{\omega d} ,$$

donc  $\mathcal{C}$  est une conique d'axe focal  $Oy$  si l'on a:

$$K > 0 , \quad r^2 > K \overline{\omega d}^2 ; \quad (15)$$

$\mathcal{C}$  est une conique d'axe focal  $Ox$  si l'on a:

$$k > 0 , \quad R^2 > k \overline{\Omega D}^2 . \quad (16)$$