Charles N. Moore. — **Summable Series and Convergence Factors** (American mathematical Society. Colloquium Publications. Volume XXII). — Un volume gr. in-8° de VI-108 pages. Prix: $ 2,00. American math. Society, New York City, 1938.

Encore un beau sujet qui devient de plus en plus physique et philosophique. Il s'agit de séries divergentes auxquelles il faut donner un sens. Or que de raisonnements humains divergent, c'est-à-dire sont de plus en plus dépourvus de conclusion lorsqu'on tente de les poursuivre indéfiniment. La sommation de la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots ,$$

par pure addition de ses termes, conduit à hésiter indéfiniment entre *zéro* et *un*. On hésite, de même, entre *l'œuf* et *l'oiseau* si l'on se demande quel fut le premier générateur. Il faut savoir faire de l'histoire autrement que dans des segments de temps toujours placés, bout à bout, de la même manière, pour que des révélations inattendues surgissent. Voilà pour l'avenir de la question. Pour le moment et pour rester sur le terrain purement mathématique disons qu'il s'agit d'abord de l'étude des limites d'expressions ayant respectivement les formes

$$\frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n}, \qquad \frac{c_0 s_n + c_1 s_{n-1} + \dots + c_n s_0}{c_0 + c_1 + \dots + c_n}.$$

Dans la seconde, à laquelle s'attache plus particulièrement le nom de Nörlund, on remarquera $c_i s_{n-i}$ où G. Mittag-Leffler et M. Em. Borel ont posé $c_i s_i$. C'est tout autre chose qu'un changement de notation et rien que cela pourrait justifier la publication du nouvel exposé. Remarque analogue pour la première expression qui n'a pas toujours le sens que lui donna Cesàro; les s_i peuvent dépendre de groupements de termes formant « période », de telles considérations remontant à Daniel Bernoulli et Leibnitz.

Il s'agit aussi d'étudier

$$u_0 \varphi_0(\alpha) + u_1 \varphi_1(\alpha) + \dots + u_n \varphi_n(\alpha)$$

à partir des séries en u_i et en $f_i(\alpha)$ et sans avoir recours obligatoirement à des limites de quotients. Si les f_i sont développés en série, l'expression précédente est une série double si bien que le procédé, appliqué à une série double, donne des sortes d'itération pour de telles séries. On sait tout ce que l'on doit aux intégrales multiples, c'est-à-dire à l'itération de l'intégration. M. Charles N. Moore semble construire de nouvelles théories sur l'itération des séries. M. Hadamard, vers 1903, s'était déjà engagé dans de telles voies. L'œuvre est profondément originale et est loin de se borner à rappeler ce que l'on doit savoir, en général, sur la sommabilité. Elle nous met plutôt sous les yeux tout ce que l'on ne sait guère, tout ce qui a été oublié ou très imparfaitement développé dans l'ordre d'idées en question. Elle s'inspire d'Abel, Adams, Agnew, Bôcher, Bochner, Bohr, Borel, Bouligand, Bromwich, Carmichael, Dienes, Durfee, Euler, Fejér, Fekete, Ford, Frobenius, Garabedian, Hahn, Hamilton, Hardy, Hausdorff, Hill, Hille, Hölder, Hurwitz, Julia, Knopp, Kogbetliantz, Landau, Le Roy, P. Lévy, Obrechkoff, Poisson, Pringsheim, Riesz, Schmidt, Schnee, Schur, Silvermann, Smail, Szegö, Tamarkin, Toeplitz, Van Vleck, Wiener, Zygmund. Toutes les résurrections qu'elle contient sont d'un effet saisissant.

A. Buhl (Toulouse).