

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES CERCLES FOCAUX DES CONIQUES  
**Autor:** Lebesgue, Henri  
**Kapitel:** 3. — Enoncé du problème; conditions d'existence DU LIEU.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28584>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 01.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### 3. — ENONCÉ DU PROBLÈME; CONDITIONS D'EXISTENCE DU LIEU.

Etant données une circonférence  $\gamma$ , une droite  $d$ , une constante non nulle  $k$ , étudions le lieu  $\mathcal{C}$  des points  $M$  tels que l'on ait :

$$\mathcal{X}(M, \gamma) = k \overline{Md}^2. \quad (7)$$

La famille des courbes  $\mathcal{C}$  contient les coniques.

Si ce lieu existe, il admettra pour axe de symétrie la perpendiculaire  $\omega x$  abaissée du centre  $\omega$  de  $\gamma$  sur  $d$ .

Soit  $\Lambda$  une droite faisant l'angle  $\varphi$  avec  $\omega x$  et rencontrant  $d$  au point  $K$ ; pour  $M$  sur  $\Lambda$ ,  $Md$ , c'est-à-dire la longueur de  $\overline{Md}$ , égale  $MK \cos \varphi$ , donc les points d'intersection de  $\Lambda$  et de  $\mathcal{C}$  sont ceux où  $\Lambda$  coupe la courbe définie par la relation

$$\mathcal{X}(M, \gamma) = k \cos^2 \varphi \overline{MK}^2. \quad (8)$$

Cette courbe est un cercle  $Z$  du faisceau  $\gamma, K$ , ou exceptionnellement l'axe de ce faisceau.

Les points cherchés existeront si cette circonférence auxiliaire  $Z$  existe et coupe  $\Lambda$ . Pour le cas où  $\Lambda$  passe par  $\omega$  l'existence de  $Z$  est seule en question.

Or, d'après (6), elle existe sauf si l'on a :

$$k(r^2 \cos^2 \varphi - \overline{\omega d}^2) > r^2,$$

$r$  étant le rayon de  $\gamma$ .

Quant à  $\mathcal{C}$ , elle existera sauf si l'inégalité précédente était vérifiée quel que soit  $\varphi$ . Or, la parenthèse devenant négative pour  $\varphi$  assez voisin de  $\frac{\pi}{2}$  il faudrait  $k < 0$  et ceci exigerait alors que la parenthèse soit toujours négative, d'où

$$\omega d = \text{longueur de } \overline{\omega d} > r.$$

Enfin, comme la plus petite valeur du premier membre est atteinte pour  $\varphi = 0$ , le lieu  $\mathcal{C}$  existe sauf si l'on a à la fois :

$$\omega d > r \quad k(\overline{\omega d}^2 - r^2) + r^2 < 0. \quad (9)$$

Pour  $\omega d = r$  la seconde inégalité ne peut être vérifiée; pour  $\omega d > r$  et  $k(\overline{\omega d^2} - r^2) + r^2 = 0$ ,  $\mathcal{C}$  se réduirait à un point, au pôle H de  $d$  par rapport à  $\gamma$ . Il était donc légitime d'écarter comme nous l'avons fait le cas où les inégalités se transformeraient en égalités.

#### 4. — CONSTRUCTION PAR POINTS ET PAR TANGENTES.

Pour construire  $\mathcal{C}$  on prendra une droite  $\Lambda$  que l'on fera varier continûment. Choisissons  $\varphi = 0$ , donc prenons une droite D parallèle à  $\omega x$  et dont nous ferons varier le pied H sur  $d$ . La relation (8) devient:

$$\mathcal{E}(M, \gamma) = k \overline{MH}^2. \quad (10)$$

Pour  $k = 1$ , cette relation définit une droite  $\Gamma$ , d'où un point M sur D. Ainsi, pour  $k = 1$ ,  $\mathcal{C}$  admet un point et un seul sur toute droite D parallèle à  $\omega x$ ; nous dirons que  $\mathcal{C}$  est parabolique.

Pour  $k \neq 1$ , la relation (10) définit une circonférence  $\Gamma$  dont le centre est le point  $\Omega$  de  $H\omega$  tel que

$$\frac{\overline{\Omega\omega}}{\overline{\Omega H}} = k. \quad (11)$$

Donc, quand H varie sur  $d$ ,  $\Omega$  décrit la perpendiculaire  $Oy$  à  $O\omega x$  qui est l'homothétique de  $d$  par rapport à  $\omega$  et dans le rapport

$$\frac{\overline{\omega\Omega}}{\overline{\omega H}} = \frac{-k}{1-k}. \quad (12)$$

Les deux points M et M' de  $\mathcal{C}$  situés sur D sont, quand ils existent, symétriques l'un de l'autre par rapport à  $Oy$ ; ainsi, pour  $k \neq 1$ , la courbe  $\mathcal{C}$  a un centre O et deux axes de symétrie rectangulaires  $O\omega x$ ,  $Oy$ .

Reprenons une droite  $\Lambda$  quelconque; ses points de rencontre avec  $\mathcal{C}$  sont sur la circonférence Z définie par (8). Mais tous les points communs à  $\mathcal{C}$  et à Z, vérifiant (7) et (8), sont tels que