

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1938)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES CERCLES FOCAUX DES CONIQUES  
**Autor:** Lebesgue, Henri  
**Kapitel:** 2. — Rappel de propriétés des faisceaux de CIRCONFÉRENCES.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28584>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

tions et les rapprochements d'autant que, dans la question actuelle, le rôle mystérieux des foyers n'a été compris des mathématiciens eux-mêmes que lorsque le raisonnement de Dandelin, la définition de Plücker ont fait des foyers des cercles focaux particuliers.

Deux articles, l'un de M. Ch. BIOCHE, l'autre de M. H. MIRABEL, destinés à de jeunes élèves (*Les Sciences au Baccalauréat*, oct. 1937 — Paris, A. Hattier) montrent bien comment des maîtres avertis peuvent utiliser élémentairement la théorie des cercles focaux. Ces articles m'ont donné l'idée de présenter sous une forme moins concise et plus accessible une Note que j'avais publiée jadis (*Nouv. Ann. de Math.*; juin 1923); l'exposé qui en résulte est d'ailleurs en étroite parenté avec ceux constitués par les exercices cités ou avec la Note de M. Bioche.

## 2. — RAPPEL DE PROPRIÉTÉS DES FAISCEAUX DE CIRCONFÉRENCES.

L'étude de l'axe radical  $\Delta$  de deux circonférences  $\Gamma$  et  $\Gamma_1$  de centres  $\Omega$  et  $\Omega_1$  conduit à la relation

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) - \mathcal{P}(M, \Gamma_1) + 2\overline{\Omega\Omega_1} \cdot \overline{M\Delta} = 0, \quad (1)$$

dans laquelle le symbole  $\mathcal{P}(M, \Gamma)$ , par exemple, représente la puissance d'un point  $M$  par rapport à  $\Gamma$  et le symbole  $\overline{M\Delta}$  le vecteur perpendiculaire à  $\Delta$  dont l'origine est  $M$  et dont l'extrémité est sur  $\Delta$ .

Si  $\Gamma_2$  est une autre circonférence du faisceau  $\Gamma, \Gamma_1$ , et dont le centre est  $\Omega_2$ , on a :

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) - \mathcal{P}(M, \Gamma_2) + 2\overline{\Omega\Omega_2} \cdot \overline{M\Delta} = 0. \quad (2)$$

D'où, par l'élimination de  $\overline{M\Delta}$ ,

$$\overline{\Omega_1\Omega_2} \mathcal{P}(M, \Gamma) + \overline{\Omega_2\Omega} \mathcal{P}(M, \Gamma_1) + \overline{\Omega\Omega_1} \mathcal{P}(M, \Gamma_2) = 0; \quad (3)$$

*relation qui lie les trois puissances d'un point quelconque  $M$  par rapport à trois cercles d'un faisceau.*

Si  $M$  est tel que la somme des deux premiers termes soit nulle,

il en est de même du troisième et inversement; donc le lieu des points M tels que,  $\lambda$ , étant une constante donnée,

$$\mathcal{P}(M, \Gamma) = \lambda \mathcal{P}(M, \Gamma_1), \quad (4)$$

lequel est la droite  $\Delta$  pour  $\lambda = 1$ , est, pour  $\lambda \neq 1$ , la circonférence  $\Gamma_2$  du faisceau  $\Gamma, \Gamma_1$  dont le centre  $\Omega_2$  est tel que

$$\frac{\overline{\Omega_2 \Omega}}{\overline{\Omega_2 \Omega_1}} = \lambda. \quad (5)$$

Ce lieu n'existe donc que si cette circonférence existe. Plaçons-nous dans le cas où,  $\Gamma$  ayant le rayon R,  $\Gamma_1$  est un cercle point.  $\Delta$  est alors la parallèle à la polaire de  $\Omega_1$  par rapport à  $\Gamma$ , qui est équidistante de cette polaire et de  $\Omega_1$ , c'est-à-dire la médiatrice de  $\Omega_1 \Omega'_1$ ;  $\Omega'_1$  étant tel que

$$\overline{\Omega \Omega'_1} \cdot \overline{\Omega \Omega_1} = R^2;$$

$\Omega'_1$  est le second cercle point du faisceau. Le rayon  $R_2$  de  $\Gamma_2$  est donné de même par

$$\overline{\Omega_2 \Omega'_1} \cdot \overline{\Omega_2 \Omega_1} = R_2^2;$$

il n'est donc réel que pour  $\Omega_2$  en dehors de  $\Omega_1 \Omega'_1$ . Or, le rapport

$$\frac{\overline{\Omega_2 \Omega}}{\overline{\Omega_2 \Omega_1}} = \frac{\overline{\Omega_2 \Omega}}{\overline{\Omega_2 \Omega} + \overline{\Omega \Omega_1}} = \frac{1}{1 - \frac{\overline{\Omega \Omega_1}}{\overline{\Omega \Omega_2}}},$$

varie de l'infini à

$$\frac{1}{1 - \frac{\overline{\Omega \Omega_1}}{\overline{\Omega \Omega'_1}}} = \frac{1}{1 - \frac{\overline{\Omega \Omega_1^2}}{R^2}} = \frac{R^2}{R^2 - \overline{\Omega \Omega_1^2}},$$

sans passer par la valeur zéro, quand  $\Omega_2$  se déplace de  $\Omega_1$  à  $\Omega'_1$ .

Donc le lieu existe, sauf si l'on a:

$$\lambda(R^2 - \overline{\Omega \Omega_1^2}) > R^2. \quad (6)$$

Si les deux membres étaient égaux, le lieu se réduirait au point  $\Omega'_1$ .