Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI

Autor: Mirimanoff, D.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28038

De plus, S étant l'aire du triangle, de la formule classique

$$16\,S^2 = 2\,(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2) - a^4 - b^4 - c^4 \;,$$

il résulte que

$$4 = k = \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\,S}\right)^2 = (\cot A + \cot B + \cot C)^2 \;; \qquad (23)$$

d'où

$$\cot A + \cot B + \cot C = 2 \;. \qquad (24)$$

En outre,

$$a^4 + b^4 + c^4 = 24\,S^2 \;, \qquad b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 = 20\,S^2 \;,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8\,S \;. \qquad (25)$$

Remarque. La relation (7) équivaut à celle-ci,

$$\sqrt{\cot A} + \sqrt{\cot B} = \sqrt{\cot C} \;,$$

que nous avons déjà donnée (*Mathesis*, 1931, p. 284), et qui est aussi une conséquence des relations (24) et (25).

ERRATUM. — Dans la formule (22), *E. M.*, 34e année, il faut lire $\left(1 + \dfrac{nd}{2\,R}\right)$.

SUR LES NOMBRES DE BERNOULLI

PAR

D. Mirimanoff (Genève).

En relisant une Note sur le quotient de Fermat et les nombres de Bernoulli, que j'ai publiée en 1895 [1], je viens d'y découvrir deux erreurs dans l'énoncé et la démonstration des formules du paragraphe 2. La première est une faute d'impression, la seconde, plus importante, un *lapsus calami*. Je tiens à les corriger; je crois utile de compléter en même temps la démonstration de mes formules, que je m'étais borné à esquisser.

---

[1] Sur la congruence $(r^{p-1} - 1) : p \equiv q_r \pmod{p}$. *Journ. für die reine und angew. Math.*, t. 115, p. 295-300.

Soient B_k le $k^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli, p un nombre premier impair et $\nu = \frac{p-1}{2}$.

En vertu d'un théorème connu de Kummer, les nombres B_k et $B_{k+\nu}$ sont liés par la relation

$$\frac{B_k}{2k} - (-1)^\nu \frac{B_{k+\nu}}{2(k+\nu)} \equiv 0 \pmod{p} , \qquad (1)$$

pour tout k non divisible par ν.

Supposons de plus que les indices k et $k+\nu$ soient premiers à p.

Si B_k est alors divisible par p, il en est de même de $B_{k+\nu}$.

Posons

$$b_k = \frac{B_k}{p} , \qquad b_{k+\nu} = \frac{B_{k+\nu}}{p} .$$

Dans la note que je viens de citer, j'ai montré que les nombres b_k et $b_{k+\nu}$ vérifient les relations suivantes

$$(-1)^{k-1}\left(\frac{b_k}{2k} - (-1)^\nu \frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)}\right) \equiv \frac{2^{2k-1}}{2^{2k}-1} \sum_{h=1}^{\nu} q_h h^{2k-1}$$

$$\equiv \sum_{h=1}^{\nu} (q_h h^k)^2 + \sum_{h=1}^{\nu} q_h h^{2k-1} \pmod{p} , \qquad (2)$$

q_h étant le quotient de Fermat de $h \pmod{p}$.

Or, on avait imprimé, *loc. cit.*, p. 299, form. (9), et c'est en cela que consiste la faute d'impression dont je viens de parler, $\Sigma(q_h h^{2k})^2$ au lieu de $\Sigma(q_h h^k)^2$. Bien que cette erreur soit facile à corriger, puisque l'expression exacte s'obtient aussi d'une formule plus générale donnée à la fin de mon travail, j'ai pensé qu'il n'était pas inutile de la signaler.

Quant au *lapsus calami* qui s'est glissé dans une formule auxiliaire (p. 300, ligne 2), j'aime mieux, avant de le corriger, reprendre la démonstration des formules (2).

Commençons par la première, qui s'écrit

$$(-1)^{k-1}\left(\frac{b_k}{2k} - (-1)^\nu \frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)}\right) \equiv \frac{2^{2k-1}}{2^{2k}-1} \sum_{h=1}^{\nu} q_h h^{2k-1} \pmod{p} . \qquad (2')$$

Comme je l'avais fait remarquer dans la note citée, cette congruence découle de la relation

$$(2k-1)!\,\psi\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^k \frac{B_k}{2k}\frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}}\,, \tag{3}$$

$(2k-1)!\,\psi(x)$ étant le polynôme de Bernoulli

$$\frac{x^{2k}}{2k} - \frac{x^{2k-1}}{2} + \sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i-1}\binom{2k-1}{2i-1}\frac{B_i}{2i}x^{2k-2i}\,.$$

En effet, l'égalité (3) entraîne la congruence

$$(2k-1)!\,\psi\left(\frac{1+p^2}{2}\right) \equiv (-1)^k \frac{B_k}{2k}\frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}} \pmod{p^2}\,, \tag{4}$$

si aucun des coefficients du polynôme de Bernoulli ne contient le facteur p au dénominateur. Or, cette dernière condition est vérifiée pour $k < 2\nu$, car aucune des fractions $\frac{B_i}{2i}$ ne contient dans ce cas p au dénominateur, sauf $\frac{B_\nu}{2\nu}$. Mais le nombre B_ν, lorsqu'il figure dans le polynôme, est multiplié par le nombre entier

$$\binom{2k-1}{2\nu-1} = \frac{(2k-1)(2k-2)\dots(2k-p+2)}{1\cdot 2\dots(p-2)}\,,$$

divisible par p, puisque $2k-1 \geqq 2\nu+1 = p$ et que $2k-p+2$ est, en vertu de notre hypothèse ($k < 2\nu$), inférieur à p.

Comme d'autre part

$$(2k-1)!\,\psi\left(\frac{1+p^2}{2}\right) = \sum_{h=1}^{\frac{p^2-1}{2}} h^{2k-1}\,, \tag{5}$$

nous pouvons écrire, pour $k < 2\nu$,

$$(-1)^k \frac{B_k}{2k}\frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}} \equiv \sum_{h=1}^{\frac{p^2-1}{2}} h^{2k-1} \pmod{p^2}\,. \tag{6}$$

Or, pour $k < 2\nu$,

$$\sum_{h=1}^{\frac{p^2-1}{2}} h^{2k-1} \equiv \sum_{h=1}^{\nu} h^{2k-1} \pmod{p^2} . \qquad (7)$$

On le vérifie directement pour $k = 1$, et pour l'établir, lorsque $1 < k < 2\nu$, il suffit de faire remarquer qu'on a

$$\sum_{h=1}^{\frac{p^2-1}{2}} h^{2k-1} = \sum_{1}^{p} h^{2k-1} + \sum_{p+1}^{2p} h^{2k-1} + \ldots + \sum_{(\nu-1)p+1}^{\nu p} h^{2k-1} + \sum_{\nu p+1}^{\nu p+\nu} h^{2k-1}$$

$$\equiv \nu \sum_{1}^{p} h^{2k-1} + (2k-1)(1+2+\ldots+\nu-1)\,p \sum_{1}^{p} h^{2k-2} + \sum_{1}^{\nu} h^{2k-1}$$

$$+ (2k-1)\,\nu p \sum_{1}^{\nu} h^{2k-2} \pmod{p^2} ,$$

puisque $(h+ip)^{2k-1} \equiv h^{2k-1} + (2k-1)\,iph^{2k-2} \pmod{p^2}$.

Or, pour $1 < k < 2\nu$, le premier, le deuxième et le quatrième terme du second membre sont divisibles par p^2.

On voit donc que, pour $k < 2\nu$,

$$(-1)^k \frac{B_k}{2k} \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}} \equiv \sum_{h=1}^{\nu} h^{2k-1} \pmod{p^2} . \qquad (8)$$

Si $k < \nu$, on a aussi

$$(-1)^{k+\nu} \frac{B_{k+\nu}}{2(k+\nu)} \frac{2^{2(k+\nu)}-1}{2^{2(k+\nu)-1}} \equiv \sum_{h=1}^{\nu} h^{2k-1+2\nu} \pmod{p^2} . \qquad (8')$$

Comme $h^{2\nu} \equiv 1 + q_h p \pmod{p^2}$, on tire de (8) et (8′)

$$(-1)^{k-1} \left(\frac{b_k}{2k} - (-1)^{\nu} \frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)}\right) \frac{2^{2k}-1}{2^{2k-1}} \equiv \sum_{h=1}^{\nu} q_h h^{2k-1} \pmod{p} .$$

Pour avoir (2′), il suffit de multiplier par $\dfrac{2^{2k-1}}{2^{2k}-1}$, ce qui est permis, si $2^{2k}-1 \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Cas général. — Nous avons supposé $k < \nu$, mais on peut s'affranchir de cette restriction en utilisant la congruence de Kummer, vraie pour tout k non divisible par ν,

$$\frac{B_k}{k} - (-1)^\nu 2 \frac{B_{k+\nu}}{k+\nu} + \frac{B_{k+2\nu}}{k+2\nu} \equiv 0 \pmod{p^2} ,$$

qu'on peut écrire

$$\frac{B_k}{k} - (-1)^\nu \frac{B_{k+\nu}}{k+\nu} \equiv (-1)^\nu \left(\frac{B_{k+\nu}}{k+\nu} - (-1)^\nu \frac{B_{k+2\nu}}{k+2\nu}\right) \pmod{p^2} .$$

Si donc (2′) est vraie pour k, elle est vraie pour $k+\nu$, et la première des relations (2) est établie.

Passons à la seconde, qui s'écrit

$$(-1)^{k-1}\left(\frac{b_k}{2k} - (-1)^\nu \frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)}\right)$$
$$\equiv \sum_{h=1}^{\nu} (q_h h^k)^2 + \sum_{h=1}^{\nu} q_h h^{2k-1} \quad (\text{mod, } p) . \qquad (2'')$$

Pour l'établir, il suffirait, dans le cas où $2^{2k} - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$, de montrer que

$$2^{2k-1} \sum_{h=1}^{\nu} q_h h^{2k-1} \equiv (2^{2k}-1) \sum_{h=1}^{\nu} \left((q_h h^k)^2 + q_h h^{2k-1}\right) \pmod{p} ,$$

ce qui peut être fait à l'aide d'une transformation élémentaire. La relation (2″) deviendrait une conséquence de (2′). Mais cette démonstration suppose $2^{2k} - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Aussi ai-je préféré établir (2″) d'une manière plus directe.

Soient x un nombre entier positif, premier à p, Q_x le quotient de la division de x par p.

Envisageons la somme

$$\sum_{h=1}^{x-1} (h - 2h^p + h^{2p-1}) = \sum_{h=1}^{x-1} h(1-h^{p-1})^2 .$$

$(1 - h^{p-1})^2$ étant divisible par p^2 pour tout $h \not\equiv 0 \pmod{p}$, on a

$$\sum_{h=1}^{x-1} (h - 2h^p + h^{2p-1}) \equiv (1 + 2 + \dots + Q_x)p$$

$$\equiv p\,\frac{Q_x(Q_x + 1)}{2} \pmod{p^2} . \qquad (9)$$

Il en résulte, en remplaçant x par x^{p^m}, m étant un nombre entier $\geqq 1$ et $x < p$,

$$\sum_{h=1}^{x^{p^m}-1} (h - 2h^p + h^{2p-1}) \equiv p\,\frac{q_x x(q_x x + 1)}{2} \pmod{p^2} ,$$

puisque le quotient de x^{p^m} par p est congru à $xq_x \pmod{p}$, pour $x < p$. En particulier

$$\sum_{h=1}^{x^{p^2}-1} (h - 2h^p + h^{2p-1}) \equiv p\,\frac{q_x x(q_x x + 1)}{2} \pmod{p^2} . \qquad (9')$$

Dans le travail cité (p. 300, ligne 2) j'avais réuni, par mégarde, les congruences (9) et (9') en substituant au second membre de (9) le second membre de (9') — *lapsus calami* dont j'ai parlé au début de cette note. Mais la relation ainsi écrite n'est exacte qu'à la condition qu'on remplace la limite supérieure $x - 1$ de la somme par $x^{p^m} - 1$, en particulier par $x^{p^2} - 1$, le nombre x étant inférieur à p. Les trois lignes qui suivent (*loc. cit.*, p. 300, lignes 3, 4 et 5) se rapportent à la congruence omise (9) et non à la congruence (9').

Reprenons maintenant la démonstration de (2''). On tire de (9')

$$\sum_{x=1}^{p-1} x^{(2k-2)p^2} \sum_{h=1}^{x^{p^2}-1} (h - 2h^p + h^{2p-1})$$

$$\equiv \frac{p}{2} \sum_{x=1}^{p-1} q_x x(q_x x + 1)\,x^{(2k-2)p^2} \pmod{p^2} . \qquad (10)$$

Or, la somme qui figure au second membre est congrue à

$$2\sum_{x=1}^{\nu} q_x x(q_x x + 1)x^{2k-2} \pmod{p} .$$

Le second membre se réduit donc à

$$p\sum_{h=1}^{\nu} \left(q_h^2 h^{2k} + q_h h^{2k-1}\right) \pmod{p^2} ,$$

en écrivant h au lieu de x.

Quant au premier membre de (10), je ferai remarquer qu'on a, en posant $y = x^{p^2}$

$$\sum_{h=1}^{y-1} h^{2p-1} = \frac{y^{2p}}{2p} - \frac{y^{2p-1}}{2} + (2p-1)\frac{B_1}{2}y^{2p-2} - \dots - \frac{2p-1}{2}B_{p-1}y^2 ,$$

$$-2\sum_{h=1}^{y-1} h^p = -2\frac{y^{p+1}}{p+1} + 2\frac{y^p}{2} - 2p\frac{B_1}{2}y^{p-1} + \dots + (-1)^{\nu} pB_{\nu}y^2 ,$$

$$\sum_{h=1}^{y-1} h = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{2} .$$

Pour avoir le premier membre de (10), il faut multiplier chacun de ces polynômes par $y^{2k-2} = x^{(2k-2)p^2}$, faire $x = 1, 2, \dots, p-1$ et ajouter.

Or, les sommes de la forme Σy^{2m} sont congrues à 0 (mod. p^3), si m n'est pas divisible par ν, et à $p-1$, si m est divisible par ν. Ces dernières sont fournies par les termes contenant B_k et $B_{k+\nu}$.

D'autre part,

$$\sum\left(-\frac{y^{2p-1}}{2} + 2\frac{y^p}{2} - \frac{y}{2}\right)y^{2k-2} = -\frac{1}{2}\sum y^{2k-1}(y^{p-1}-1)^2 \equiv 0 \pmod{p^2} .$$

Le premier membre de (10) est donc congru (mod. p^2) à

$$(-1)^{k-1}\binom{2p-1}{2k-1}\frac{B_k}{2k}\sum y^{2(p-1)} + (-1)^{k+\nu-1}\binom{2p-1}{2k+2\nu-1}\frac{B_{k+\nu}}{2(k+\nu)}\sum y^{2\nu}$$

$$\equiv (-1)^{k-1}p\left(-\frac{b_k}{2k}(p-1) + (-1)^{\nu}\frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)}(p-1)\right)$$

$$\equiv (-1)^{k-1}p\left(\frac{b_k}{2k} - (-1)\ \frac{b_{k+\nu}}{2(k+\nu)}\right) \pmod{p^2} .$$

En divisant par p la congruence (10) ainsi transformée, on obtient enfin la formule (2″).

On voit donc que le *lapsus calami* que j'ai signalé peut être corrigé de la manière suivante:

Page 300, ligne 2, au lieu de

$$(h = 1, 2, \dots, x - 1) \quad \text{lire} \quad (h = 1, 2, \dots, x^{p^2} - 1) \ ,$$

Page 300, ligne 3, au lieu de

« quelconque », lire « positif inférieur à p ».

Page 300, lignes 4 et 5, au lieu de

$$x = 1^{p^2}, \ 2^{p^2}, \dots, (p-1)^{p^2} \quad \text{lire} \quad x = 1, 2, \dots, p - 1 \ .$$