SUR LES DIVISIONS SEMBLABLES TRACÉES SUR LES CÔTÉS D'UN TRIANGLE

PAR

R. Marchay (Rouen).

I. — Théorème général.

1. Soit un triangle A.B.C., L.M.N., des points mobiles qui déterminent respectivement sur les côtés a, b, c, des divisions semblables.

Soit V un point quelconque du plan. Faisons une inversion de pôle V: a, b, et c, se transforment en trois cercles a', b', c'; ceux des cercles L.M.N. ou Γ qui passent par V, se transforment en des droites.

Accentuons: les inverses L', M', N', de L, M, N, appartiennent à des divisions homographiques, sur a, b, c, qui ont V pour point commun. Il en résulte que les cercles M'.N'.A'. et M'.L'.C'. passent respectivement par des points E et F distincts de A' et C' et qui ne dépendent que de la position de V.

A tout point M', correspondent deux intersections du cercle E.M'.N'.A. avec c, l'enveloppe de M'.N'. quand M et N. sont supposés décrire seuls les divisions données est donc une conique.

De même l'enveloppe de M'.L'. quand M et L sont supposés décrire seuls les divisions données est une conique.

Il en résulte que L', M', N', ont quatre systèmes de positions en ligne droite, et, *par le point* V *passent au plus quatre cercles* Γ.

2. — On en conclut que *l'enveloppe de la corde commune au cercle* Γ *et à une position fixe* Γ_0 *de ce cercle est une courbe de troisième classe au plus.*

3. — Il y a trois systèmes de positions L.M.N., en ligne droite, deux sont en général à distance finie, nous les désignerons par Δ_1 et Δ_2; la troisième est la droite de l'infini. Si le cercle Γ correspondant coupe les côtés en trois autres points à distance finie, ces points sont en ligne droite, et nous dirons que le système est *convergent*. Dans le cas contraire, nous dirons qu'il est *divergent*.

Avant de passer à l'étude des systèmes convergents, nous examinerons quelques propriétés des droites de Simson généralisées.

II. — Droites de Simson sous un angle quelconque.

4. — Les projections sous l'angle φ d'un point du plan d'un triangle sur les côtés et les projections $(\pi - \varphi)$ de son inverse, sont sur une même circonférence. Si l'inverse est à l'infini, ce cercle devient la droite de Simson, sous l'angle φ du point donné. Le lieu des points qui ont des droites de Simson sous un angle quelconque est le cercle circonscrit (*J. de Vuibert*, 37^{me} année, p. 45).

5. — Les points dont les droites de Simson (φ) passent par un point Q sont sur une hyberbole passant par Q, par un sommet A, et, admettant pour directions asymptotiques, celles des projetantes (φ) sur les côtés B.A. et C.A.

Cette conique coupe le cercle circonscrit en trois autres points. *Donc la condition de convergence des droites de Simson* (φ) *de trois points* S, S_2, S_3, *est que* S_2, S_3 *soit antiparallèle à* A.S. *par rapport à l'angle* B.A.C., *dévié de l'angle* $(-\varphi)$.

6. — Soient, s, s_2, s_3, α les distances angulaires dirigées de S, S_2, S_3, A, à A par rapport au centre O du cercle circonscrit. A' étant l'extrémité de la corde AA' parallèle à B.C. — Par A, je mène la corde AS_1' parallèle à S_2, S_3 ; ou a, le rayon étant pris pour unité, $\overparen{S_2S_1} = s_3$.

La condition de convergence est alors que AS_1 et AS, soient antiparallèles, etc... C'est-à-dire que l'on ait

$$\overparen{S_1B} - \varphi = \varphi - \overparen{S_1'C}$$