Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DES CONGRUENCES DE NORMALES ATTACHÉES A LA DÉFORMATION DES SURFACES

Autor: Decuyper, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28034

SUR DES CONGRUENCES DE NORMALES ATTACHÉES A LA DÉFORMATION DES SURFACES

PAR

M. Decuyper (Amiens).

1. — Considérons deux surfaces applicables S et S′. M(x, y, z), point général de S a pour homologue le point M′(x', y', z') de S′; une tangente orientée en M à la surface S a pour homologue une tangente orientée en M′ à S′. A M et M′, nous associons les trièdres $M\overline{x}\overline{y}\overline{z}$ et $M'\overline{x'}\overline{y'}\overline{z'}$ se déduisant du trièdre trirectangle de référence Oxyz respectivement par les translations $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$. Le plan tangent en M à la surface S peut être superposé au plan tangent en M′ à S′, les tangentes orientées homologues se recouvrant et les arcs infiniment petits homologues se superposant. Quand on réalise cette superposition, le trièdre $M\overline{x}\overline{y}\overline{z}$ vient d'abord, par la translation $\overrightarrow{MM'}$ sur le trièdre $M'\overline{x'}\overline{y'}\overline{z'}$, puis, par rotation autour de M′, il prend la position $M'\xi'\eta'\gamma'$ caractérisée par les cosinus directeurs indiqués par le tableau suivant

	$M'\overline{x'}$	$M'\overline{y'}$	$M'\overline{z'}$
$M'\xi'$	α	α'	α''
$M'\eta'$	β	β'	β''
$M'\zeta'$	γ	γ'	γ''

Le vecteur qui avait, par rapport aux axes $M\overline{x}\overline{y}\overline{z}$, pour coordonnées dx, dy, dz a gardé ces coordonnées par rapport aux axes $M'\xi'\eta'\zeta'$, mais il a pris, par rapport aux axes $M'\overline{x'}\,\overline{y'}\,\overline{z'}$, les coordonnées dx', dy', dz'. On a donc

$$\left\{\begin{aligned} dx' &= \alpha dx + \beta dy + \gamma dz\ , \\ dy' &= \alpha' dx + \beta' dy + \gamma' dz\ , \\ dz' &= \alpha'' dx + \beta'' dy + \gamma'' dz\ . \end{aligned}\right. \tag{1}$$

2. — D'ailleurs, si l'on écrit *a priori* ce système (1) où les coefficients α, β, ... γ'' sont les cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre trirectangle direct et où les seconds membres sont des différentielles exactes, on a

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2\ .$$

Le système (1) définit donc alors une déformation de la surface S. *On peut dire que déformer la surface* S, *c'est déterminer les neuf cosinus directeurs* α, β, ... γ'' *des arêtes d'un trièdre trirectangle direct satisfaisant aux conditions*

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial x'}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)$$

et les analogues.

Si l'on prend $u \equiv x$, $v \equiv y$, ces conditions prennent la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x} + p\frac{\partial\gamma}{\partial y} - q\frac{\partial\gamma}{\partial x} &= 0\ , \\ \frac{\partial\alpha'}{\partial y} - \frac{\partial\beta'}{\partial x} + p\frac{\partial\gamma'}{\partial y} - q\frac{\partial\gamma'}{\partial x} &= 0\ , \\ \frac{\partial\alpha''}{\partial y} - \frac{\partial\beta''}{\partial x} + p\frac{\partial\gamma''}{\partial y} - q\frac{\partial\gamma''}{\partial x} &= 0\ , \end{aligned}\right. \qquad \begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial x}\ , \\ q &= \frac{\partial z}{\partial y}\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Le problème de la déformation de S est donc lié à l'intégration de ce système. Nous pouvons lui donner une autre forme simple.

Introduisons les rotations $P'_1 dx + P'_2 dy$, $Q'_1 dx + Q'_2 dy$, $R'_1 dx + R'_2 dy$ du trièdre mobile $M'\xi'\eta'\zeta'$; les rotations partielles s'expriment en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \gamma''$ et leurs dérivées par les formules bien connues

$$P_1' = S\gamma\frac{\partial \beta}{\partial x} = - S\beta\frac{\partial \gamma}{\partial x}, \qquad P_2' = S\gamma\frac{\partial \beta}{\partial y} = - S\beta\frac{\partial \gamma}{\partial y},$$

$$Q_1' = S\alpha\frac{\partial \gamma}{\partial x} = - S\gamma\frac{\partial \alpha}{\partial x}, \qquad Q_2' = S\alpha\frac{\partial \gamma}{\partial y} = - S\gamma\frac{\partial \alpha}{\partial y},$$

$$R_1' = S\beta\frac{\partial \alpha}{\partial x} = - S\alpha\frac{\partial \beta}{\partial x}, \qquad R_2' = S\beta\frac{\partial \alpha}{\partial y} = - S\alpha\frac{\partial \beta}{\partial y}.$$

En multipliant les trois équations (2) par $\alpha, \alpha', \alpha''$ et ajoutant, puis par β, β', β'', puis par $\gamma, \gamma', \gamma''$, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} R_1' + pQ_2' - qQ_1' &= 0, \\ R_2' - pP_2' + qP_1' &= 0, \\ P_1' + Q_2' &= 0, \end{aligned}\right. \quad (3) \qquad \text{ou} \qquad \left\{\begin{aligned} pP_1' + qQ_1' - R_1' &= 0, \\ pP_2' + qQ_2' - R_2' &= 0, \\ P_1' + Q_2' &= 0. \end{aligned}\right. \quad (3')$$

Les deux premières équations de ce dernier système signifient que les vecteurs rotations partielles $\overrightarrow{\Omega_x'}$ *et* $\overrightarrow{\Omega_y'}$ *sont dans le plan tangent à la surface* S'.

Pour déterminer ces rotations partielles, nous ajouterons aux relations (3) les conditions de compatibilité pour les rotations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial P_1'}{\partial y} - \frac{\partial P_2'}{\partial x} + R_1'Q_2' - R_2'Q_1' &= 0, \\ \frac{\partial Q_1'}{\partial y} - \frac{\partial Q_2'}{\partial x} + P_1'R_2' - P_2'R_1' &= 0, \\ \frac{\partial R_1'}{\partial y} - \frac{\partial R_2'}{\partial x} + Q_1'P_2' - Q_2'P_1' &= 0, \end{aligned}\right.$$

Du système (3), nous pouvons tirer Q_2', R_1', R_2' en fonction de P_1', P_2', Q_1', et les conditions de compatibilité donnent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial Q_1'}{\partial y} + \frac{\partial P_1'}{\partial x} - q(P_1'^2 + P_2'Q_1') = 0, \\ &\frac{\partial P_1'}{\partial y} - \frac{\partial P_2'}{\partial x} - p(P_1'^2 + P_2'Q_1') = 0, \\ &tQ_1' + 2sP_1' - rP_2' + (P_1'^2 + P_2'Q_1')(1 + p^2 + q^2) = 0. \end{aligned}\right. \qquad (4)$$

Ce système où les inconnues sont les fonctions P_1', P_2', Q_1' serait à intégrer une fois z donné en fonction de x et y. Nous pouvons remarquer qu'il conduit toujours à deux équations indépendantes de z, car les deux premières équations de (4) donnent p et q, d'où r, s, t; en égalant les deux valeurs de s, on aura une de ces équations; en portant r, s, t, p, q dans la dernière, on aura une autre équation indépendante de z.

3. — Cherchons une interprétation géométrique de ces résultats. Nous considérons le trièdre $M\xi\eta\zeta$, nouvelle position du trièdre $M'\overline{x'}\overline{y'}\overline{z'}$ lorsqu'on superpose le plan tangent en M' à S' au plan tangent en M à la surface S, transformation inverse de celle qui a été envisagée dans le premier paragraphe.

Les équations du système (2) expriment que $\alpha dx + \beta dy + \gamma dz$ et les quantités analogues sont des différentielles exactes, dx', dy', dz'; autrement dit, que le rayon $M\xi$, par exemple, est orthogonal à la surface lieu du point de coordonnées

$$\left\{\begin{aligned} X &= x - \alpha x' , \\ Y &= y - \beta x' , \\ Z &= z - \gamma x' . \end{aligned}\right.$$

$M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$ décrivent donc des congruences de normales et, d'après le théorème de Beltrami (Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, Capitolo X, § 180) ces congruences restent normales au cours d'une déformation quelconque de S.

Nous pouvons dire que: déformer la surface S, *c'est déterminer de toutes les façons possibles trois congruences de normales dont les rayons concourant en un point de* S *sont arêtes d'un trièdre trirectangle.*

Nous pourrions introduire encore les rotations partielles $\vec{\Omega}_x$, $\vec{\Omega}_y$ du trièdre mobile $M\xi\eta\gamma$ et nous trouverions comme par le système (3') que ces vecteurs sont contenus dans le plan tangent en M à la surface S et qu'ils satisfont encore à $P_1 + Q_2 = 0$.

4. — Etant donné une surface S, cherchons d'abord à déterminer une congruence de normales $M\xi$ de cosinus directeurs

α, β, γ ayant pour support cette surface. D'après ce qui précède, ce problème conduit à l'intégration du système

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\alpha}{\partial y}-\frac{\partial\beta}{\partial x}+p\frac{\partial\gamma}{\partial y}-q\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0\\ &\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Donnons-nous arbitrairement une fonction $x_1(x, y)$ et posons

$$\alpha+p\gamma=\frac{\partial x_1}{\partial x}\,,\qquad \beta+q\gamma=\frac{\partial x_1}{\partial y}\,,\qquad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1\,. \tag{6}$$

On vérifie de façon immédiate que la résolution de ces équations nous donne deux systèmes de valeurs α, β, γ satisfaisant aux conditions (5) et telles aussi que

$$\alpha dx+\beta dy+\gamma dz=dx_1\,.$$

Ce procédé a une interprétation géométrique simple; considérons la sphère dépendant des deux paramètres x, y:

$$(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2-x_1^2=0$$

et cherchons-en l'enveloppe. Nous adjoignons à l'équation de la sphère les deux suivantes

$$\frac{X-x}{x_1}+p\frac{Z-z}{x_1}+\frac{\partial x_1}{\partial x}=0\,,$$

$$\frac{Y-y}{x_1}+q\frac{Z-z}{x_1}+\frac{\partial x_1}{\partial y}=0\,.$$

En comparant à (6), nous en déduisons

$$\alpha=\frac{X-x}{-x_1}\,,\qquad \beta=\frac{Y-y}{-x_1}\,,\qquad \gamma=\frac{Z-z}{-x_1}\,.$$

Les valeurs de α, β, γ sont les cosinus directeurs de la droite $M\mu$ joignant M au point limite μ, et on comprend l'existence des deux solutions, correspondant aux rayons $M\mu$, $M\mu'$ symétriques par rapport à la normale en M à la surface S.

Réciproquement, soit une congruence de normales quelconque ayant pour support la surface S; prenons sur le rayon issu du point M de la surface S, le pied μ sur une surface normale; la sphère de centre M, de rayon $M\mu$ donne le résultat qui précède; le procédé indiqué permet donc de trouver toutes les congruences de normales $M\xi$.

Remarquons en passant que nous trouvons ici une démonstration du théorème de Malus: si des rayons incidents μM *sont normaux à une surface, les rayons réfléchis* $M\mu'$ *sont normaux à une autre surface, seconde nappe de l'enveloppe des sphères de centre* M, *de rayon* $M\mu$.

Si l'on veut arriver à une déformation de la surface S, il faut que l'on trouve *trois familles de sphères* correspondant respectivement à des fonctions x_1, y_1, z_1, qui donnent des trièdres trirectangles par les rayons joignant M aux points limites convenablement associés.

5. — *Nous nous proposerons un problème intermédiaire: nous chercherons deux familles de sphères donnant deux rayons perpendiculaires.* Ce problème est toujours possible à partir d'une famille de sphères (x_1) arbitrairement choisie.

En effet, α, β, γ étant déterminés, α', β, γ' devront satisfaire aux conditions

$$\left\{\begin{aligned} &\alpha' + p\gamma' = \frac{\partial y_1}{\partial x}, \qquad \beta' + q\gamma' = \frac{\partial y_1}{\partial y}, \qquad \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \\ &\qquad\qquad \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0 . \end{aligned}\right.$$

γ' sera donc donné par

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma'^2(1 + p^2 + q^2) - 2\gamma'\left(p\frac{\partial y_1}{\partial x} + q\frac{\partial y_1}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)^2 - 1 = 0, \\ &\qquad\qquad \gamma'(p\alpha + q\beta - \gamma) - \left(\alpha\frac{\partial y_1}{\partial x} + \beta\frac{\partial y_1}{\partial y}\right) = 0 . \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Nous éliminerons γ' entre ces deux équations et nous trouverons ainsi une équation différentielle qui déterminera y_1, une fois x_1, choisi. Dans ces calculs, nous utiliserons les paramètres différentiels $\Delta_1 x_1$, $\Delta_1 y_1$, $\nabla(x_1, y_1)$ par rapport à la première forme fondamentale de la surface S

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2$$

(Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, p. 76, 123).

La première équation prendra la forme

$$\left[\gamma'(1+p^2+q^2)-\left(p\frac{\partial y_1}{\partial x}+q\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)\right]^2+(1+p^2+q^2)(\Delta_1 y_1-1)=0. \tag{8}$$

Nous noterons aussi que

$$(p\alpha+q\beta-\gamma)^2=\left[\gamma(1+p^2+q^2)-\left(p\frac{\partial x_1}{\partial x}+q\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)\right]^2=$$
$$=(1+p^2+q^2)(1-\Delta_1 x_1)\ .$$

Reportons dans l'équation (8) la valeur de γ', tirée de la seconde équation (7)

$$\left[\left(\alpha\frac{\partial y_1}{\partial x}+\beta\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)(1+p^2+q^2)-\left(p\frac{\partial y_1}{\partial x}+q\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)(p\alpha+q\beta-\gamma)\right]^2+$$
$$+(1+p^2+q^2)^2(\Delta_1 y_1-1)(1-\Delta_1 x_1)=0\ .$$

Transformons la quantité entre crochets en y remplaçant α et β par leurs expressions en fonction de γ; nous obtenons

$$(1+p^2+q^2)\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial x}+\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial y}\right)-\left(p\frac{\partial x_1}{\partial x}+q\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)\left(p\frac{\partial y_1}{\partial x}+q\frac{\partial y_1}{\partial y}\right),$$

ou

$$(1+p^2)\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial y}-pq\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial y}+\frac{\partial x_1}{\partial y}\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)+(1+q^2)\frac{\partial x_1}{\partial x}\frac{\partial y_1}{\partial x},$$

soit encore

$$(1+p^2+q^2)\nabla(x_1,y_1)\ ,$$

si bien que la relation entre x_1 et y_1 prend la forme

$$\nabla^2(x_1,y_1)=(\Delta_1 x_1-1)(\Delta_1 y_1-1)\ . \tag{9}$$

Nous utiliserons cette équation pour la recherche de y_1 en prenant, une fois x_1 choisi arbitrairement, pour nouvelles lignes coordonnées sur la surface, les lignes

$$u\equiv x_1=\text{const}$$

et leurs trajectoires orthogonales

$$v=\text{const}\ .$$

Alors, nous aurons

$$F = 0\ ,$$

$$\Delta_1 x_1 = \frac{1}{E}\ , \qquad \Delta_1 y_1 = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial y_1}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)^2,$$

$$\nabla (x_1\,,\, y_1) = \frac{1}{E}\,\frac{\partial y_1}{\partial u}\ .$$

L'équation différentielle déterminant y_1 sera

$$\left(\frac{1}{E} - 1\right)\left[\frac{1}{E}\left(\frac{\partial y_1}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G}\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)^2 - 1\right] = \frac{1}{E^2}\left(\frac{\partial y_1}{\partial u}\right)^2,$$

ou encore

$$G\left(\frac{\partial y_1}{\partial u}\right)^2 + (E - 1)\left(\frac{\partial y_1}{\partial v}\right)^2 = (E - 1)\,G\ .$$

Nous pouvons encore voir ce qui caractérise le ds^2 de la surface quand on prend pour lignes coordonnées les $x_1 =$ const. et les $y_1 =$ const.; dans ce cas, les coefficients E, F, G satisfont à

$$(E - 1)\,(G - 1) - F^2 = 0\ . \tag{10}$$

Donc, chaque fois que le ds² *de la surface sera mis sous une forme telle que cette dernière condition soit satisfaite, nous aurons tout de suite le couple de congruences de normales cherché.*

6. — *La relation* $(E - 1)\,(G - 1) - F^2 = 0$ *exprime que* $ds^2 - dx_1^2 - dy_1^2$ *est un carré parfait, condition évidemment nécessaire pour que l'on obtienne une déformation; mais cette condition n'est pas suffisante*, il faut encore que $ds^2 - dx_1^2 - dy_1^2$ soit *le carré d'une différentielle totale exacte.*

Sans pousser plus loin cette recherche, nous pouvons indiquer que lorsque nous trouverons un trièdre trirectangle (T) dépendant de deux paramètres dont les arêtes décrivent des congruences de normales, nous en déduirons un couple de surfaces applicables.

Nous terminerons par un tel exemple en utilisant des résultats obtenus par M. Vincensini et publiés dans deux mémoires:

« *Sur une famille de congruences rectilignes attachées aux surfaces applicables sur les surfaces de révolution* » (Bulletin des Sciences Mathématiques, Tome LIV, p. 117) et « *Sur la défor-*

mation de certaines congruences rectilignes » (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Tome XXIV).

Considérons une surface S applicable sur une surface de révolution; rapportons-la aux transformées des méridiens $v =$ const. et aux transformées des parallèles $u =$ const.; l'élément linéaire est donné par

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2 \,. \qquad (G = f(u))$$

Dans le premier des mémoires cités, M. Vincensini montre que si l'on porte sur la tangente à la transformée du méridien une longueur proportionnelle à $\sqrt{G}$

$$MI = \lambda\sqrt{G} \qquad (\lambda = \text{constante})$$

et si l'on élève IN perpendiculaire au plan tangent, la congruence des droites IN est normale et reste normale lorsqu'on déforme S arbitrairement.

La droite MI, tangente à une géodésique de S, engendre une congruence de normales. Nous avons ainsi deux droites concourantes orthogonales MI et IN engendrant des congruences de normales.

Menons encore, dans le plan tangent en M à S, $I\Delta$ perpendiculaire à MI. M. Vincensini a étudié, dans le second mémoire cité, les congruences telles que $I\Delta$. En utilisant les expressions qu'il a données des éléments de Kummer de ces congruences, la condition pour que la congruence $(I\Delta)$ soit normale (à savoir $f = f'$), s'écrit

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,\lambda\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial v} + \lambda\sqrt{G}\,\frac{D'^2}{\sqrt{EG}} =$$

$$= -\,\frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\left(\sqrt{E} + \lambda\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \lambda\sqrt{G}\,\frac{DD''}{\sqrt{EG}}\,,$$

ou, puisque $E \equiv 1$ et $\dfrac{\partial G}{\partial v} = 0$,

$$\lambda D'^2 = -\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \lambda\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 + \lambda DD''\,,$$

ou encore

$$\lambda(DD'' - D'^2) - \lambda\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 - \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0\,.$$

En tenant compte de l'équation de Gauss

$$DD'' - D'^2 = -\sqrt{G}\,\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2},$$

nous pouvons enfin écrire

$$\lambda\sqrt{G}\,\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} + \lambda\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 0 . \tag{11}$$

Posant $\sqrt{G} = r$, l'équation (11) devient

$$\lambda r r'' + \lambda r'^2 + r' = 0 ,$$

où l'on désigne par r' et r'' les dérivées première et seconde de $r = r(u)$.

Nous voyons que

$$\lambda r r' + r + c = 0 , \qquad c = \text{constante} ,$$

d'où

$$du = -\frac{\lambda r}{r + c}\,dr . \tag{12}$$

La forme du ds^2 de la surface S est

$$ds^2 = du^2 + r^2 dv^2 .$$

En tenant compte de la relation (12), et en prenant pour nouvelles variables r et v, on obtient

$$ds^2 = \frac{\lambda^2 r^2}{(r + c)^2}\,dr^2 + r^2 dv^2 .$$

Nous pouvons chercher enfin le ds^2 de la surface lieu de I, sommet du trièdre trirectangle obtenu. Nous reprenons les notations employées par M. Vincensini dans son premier mémoire: X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 sont les cosinus directeurs des tangentes aux courbes v = constante et r = constante sur la surface S, X_3, Y_3, Z_3 désignant les cosinus directeurs de la normale. Pour l, m, n coordonnées de I par rapport aux axes fixes, on a

$$\left\{\begin{aligned} l &= x + \lambda r X_1 , \\ m &= y + \lambda r Y_1 , \qquad \lambda = \text{constante} \\ n &= z + \lambda r Z_1 . \end{aligned}\right.$$

Commençons par établir les valeurs des dérivées des cosinus directeurs $X_1, Y_1, \dots Z_3$ au moyen des cosinus eux-mêmes et des coefficients des deux premières formes fondamentales de la surface. En nous servant des expressions de

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial r \, \partial \varphi}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2},$$

nous trouvons

$$\frac{\partial X_1}{\partial r} = \frac{r+c}{\lambda r} D X_3 , \qquad \frac{\partial X_1}{\partial \varphi} = \frac{r+c}{\lambda r}(X_2 + D' X_3)$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial r} = \frac{1}{r} D' X_3 , \qquad \frac{\partial X_2}{\partial \varphi} = -\frac{r+c}{\lambda r} X_1 + \frac{1}{r} D'' X_3$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial r} = -\frac{r+c}{\lambda r} D X_1 - \frac{1}{r} D' X_2 , \qquad \frac{\partial X_3}{\partial \varphi} = -\frac{r+c}{\lambda r} D' X_1 - \frac{1}{r} D'' X_2 .$$

Soit alors, pour la surface lieu de I, la première forme fondamentale

$$ds'^2 = E' dr^2 + 2 F' dr \, d\varphi + G' d\varphi^2 ,$$

nous trouvons

$$E' = \sum \left(\frac{\partial l}{\partial r}\right)^2 = \lambda^2 \left(\frac{2r+c}{r+c}\right)^2 + (r+c)^2 D^2 ,$$

$$F' = \sum \frac{\partial l}{\partial r} \frac{\partial l}{\partial \varphi} = (r+c)^2 D D' ,$$

$$G' = \sum \left(\frac{\partial l}{\partial \varphi}\right)^2 = (2r+c)^2 + (r+c)^2 D'^2 ,$$

ainsi

$$ds'^2 = \lambda^2 \left(\frac{2r+c}{r+c}\right)^2 dr^2 + (2r+c)^2 d\varphi^2 + (r+c)^2 (D\, dr + D' d\varphi)^2 .$$

Si la surface de départ S est de révolution, D ne dépend que de r, D′ est nul et les surfaces obtenues sont applicables sur des surfaces de révolution, quel que soit λ, résultat évident géométriquement.
