

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE ROULEMENT DES COURBES
Autor: BUSCHGUENNE, M.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28033>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LE ROULEMENT DES COURBES

PAR

M. BUSCHEGUENNE (Moscou).

1. — Quand une courbe invariable Γ (dite *roulante*) roule sans glisser sur une courbe fixe donnée (dite *base*) C , un point fixe du plan de Γ parcourt la *roulette* C' . On sait que si l'on donne arbitrairement deux quelconques de ces trois courbes Γ , C , C' , la troisième est définie. Le roulement a été étudié en coordonnées ordinaires ou intrinsèques par HATON DE LA GOUPILLIÈRE¹ et divers autres géomètres.

Nous allons donner une solution du problème en utilisant la représentation des vecteurs dans un plan par des nombres complexes.

2. — La base C peut être représentée par l'équation rapportée à deux axes fixes Oxy

$$x + iy \equiv z = z(u) . \quad (1)$$

La courbe roulante Γ est définie par l'équation

$$\xi + i\eta \equiv \zeta = \zeta(\varrho) \quad (2)$$

rapportée à des axes rectangulaires $\bar{O}\xi\eta$ invariablement liés au plan mobile de cette courbe Γ .

Si la courbe Γ roule, sans glissement, sur la base C , ces deux courbes sont constamment tangentes en des points associés, de sorte que l'on a

$$dz = d\zeta e^{i\theta} , \quad (3)$$

¹ *Etude géométrique et dynamique des roulettes planes ou sphériques*. Paris, Gauthier-Villars, 1910.

θ étant l'angle de rotation de l'axe mobile $\overline{O\xi}$, à savoir $\theta = (Ox, \overline{O\xi})$; désignons par \bar{z} le nombre complexe définissant l'origine mobile \overline{O} par rapport aux axes fixes. On a

$$z = \bar{z} + e^{i\theta} \zeta$$

ce que nous pouvons écrire

$$\bar{z} = z - e^{i\theta} \zeta \quad (4)$$

En prenant sur le plan mobile un point déterminé ζ' , ce point parcourt sur le plan fixe la roulette C' représentée, par rapport aux axes fixes, par l'équation

$$z' = \bar{z} + e^{i\theta} \zeta'$$

que nous pouvons, en vertu de (4), écrire

$$z' = z + (\zeta' - \zeta) e^{i\theta} \quad (5)$$

ou encore

$$z' = z + (\zeta' - \zeta) \frac{dz}{d\zeta} \quad (5')$$

Les équations (3) et (5) sont fondamentales pour toutes les considérations qui suivent.

3. — *En premier lieu*, supposons que l'on donne la base C et la roulante Γ représentées respectivement par les équations (1) et (2); soient z_0, ζ_0, \dots les nombres complexes conjugués respectivement de z, ζ, \dots

Il s'agit de déterminer la roulette.

En égalant les modules des deux membres de l'équation (3) on obtient la relation

$$\sqrt{dz dz_0} = \sqrt{d\zeta d\zeta_0} \quad (6)$$

ou

$$\sqrt{\frac{dz}{du} \frac{dz_0}{du}} du = \pm \sqrt{\frac{d\zeta}{d\varrho} \frac{d\zeta_0}{d\varrho}} d\varrho \quad (6')$$

qui, tenant compte de la condition initiale, donne les points associés des courbes C et Γ ; le paramètre ϱ sera une fonction

déterminée de u et alors la roulette C' sera représentée par l'équation (5').

4. — Supposons, en *second lieu*, données la base C par l'équation (1) et la roulette C'

$$z' = z'(\omega) \quad (7)$$

rapportée, elle aussi, aux axes fixes; cherchons la roulante Γ . L'équation (5) donne

$$\zeta = \zeta' - (z' - z) e^{-i\theta} . \quad (8)$$

En substituant cette valeur de ζ dans la condition (3) on trouve

$$dz' = i(z' - z) d\theta \quad (9)$$

et, par suite,

$$dz'_0 = -i(z'_0 - z_0) d\theta . \quad (9')$$

Les équations (9) et (9') donnent donc

$$\frac{dz'}{z' - z} + \frac{dz'_0}{z'_0 - z_0} = 0 \quad (10)$$

ou

$$\frac{1}{z' - z} \frac{dz'}{d\omega} + \frac{1}{z'_0 - z_0} \frac{dz'_0}{d\omega} = 0 . \quad (10')$$

Cette relation *en termes finis* donne ω en fonction de u . En intégrant ensuite la relation

$$id\theta = \frac{dz'}{z' - z} \quad (11)$$

nous trouvons une fonction $\theta = \theta(u)$ effectivement réelle, car le second membre $\frac{dz'}{z' - z}$ est, en vertu de (10), une quantité imaginaire pure. Ensuite l'équation (8) détermine la roulante Γ , ζ étant une constante arbitraire (complexe).

5. — Proposons-nous de résoudre le *troisième problème*: étant données la roulette (7) et la roulante (2) trouver la courbe base. Dans ce cas nous déduisons des équations (5) et (3)

$$dz' = i(\zeta' - \zeta) e^{i\theta} d\theta \quad (12)$$

en même temps que la relation conjuguée

$$dz'_0 = -i(\zeta'_0 - \zeta_0) e^{-i\theta} d\theta. \quad (12')$$

Ces deux équations nous donnent, d'abord, la relation (différentielle) entre les paramètres ν , ω et ensuite θ en fonction de l'un de ces deux paramètres. Nous pouvons opérer ainsi: écrivons

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{dz' dz'_0} = \sqrt{(\zeta' - \zeta)(\zeta'_0 - \zeta_0)} d\theta \\ \frac{dz'}{dz'_0} = -\frac{\zeta' - \zeta}{\zeta'_0 - \zeta_0} e^{2i\theta} \end{array} \right. \quad (13)$$

et éliminons θ ; on obtient l'équation différentielle liant ν et ω :

$$d \log \left(\frac{dz'}{dz'_0} \right) + \frac{d\zeta}{\zeta' - \zeta} - \frac{d\zeta_0}{\zeta'_0 - \zeta_0} = \frac{2i \sqrt{dz' dz'_0}}{\sqrt{(\zeta' - \zeta)(\zeta'_0 - \zeta_0)}}. \quad (14)$$

La fonction $\omega(\nu)$ étant ainsi trouvée, nous obtenons θ par une quadrature et enfin l'équation

$$z = z' - (\zeta' - \zeta) e^{i\theta}$$

définit la courbe base cherchée.