Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA COURBE DE L'HÔPITAL

Autor: Turrière, E.

Kapitel: 10. – MOUVEMENTS D'UN POINT MATÉRIEL, DANS LE PLAN, SUIVANT LA LOI DES AIRES SUR L'HODOGRAPHE.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28032

Le rayon de courbure de l'image de courbure est donc ρ_1

$$\rho_1 = \frac{1}{9}\rho^{-\frac{7}{3}}(9\rho^2 - 3\rho\rho'' + 4\rho'^2)\,,$$

ρ' et ρ'' désignant les dérivées première et seconde de $\rho(\varphi)$.

L'image se réduit à un point lorsque la courbe (C) est une parabole ($\rho_1 = 0$).

Dans le cas de la courbe d'égale pression, l'image de courbure de Minkowski de cette courbe est l'enveloppe d'une droite d'équation

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = k(a + \sin\varphi)\ ;$$

l'image est ainsi une *circonférence*. Cet exemple est de ceux qui illustrent le mieux la théorie des images de la courbure.

10. — Mouvements d'un point matériel, dans le plan, suivant la loi des aires sur l'hodographe.

L'étude de la courbe de pression constante dans le mouvement du point pesant pose la question des mouvements avec loi des aires sur l'hodographe.

La condition est:

$$v^2 \frac{d\alpha}{dt} = C = \text{constante}\ .$$

avec ses formes équivalentes:

$$v^3 = C \cdot \rho\,, \qquad \rho^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^3 = \text{const}\ ,$$

d'où la loi du temps correspondante:

$$nt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \rho^{\frac{2}{3}}\, d\alpha\ ;$$

n est une constante. Cette intégration est donc attachée simplement à l'équation naturelle de la courbe trajectoire du point matériel, et à sa radiale de Tücker.

Si la radiale est représentée par l'équation polaire

$$\rho = f(\alpha) ,$$

l'hodographe du mouvement a, dans le cas actuel, pour équation polaire

$$r^3 = C \cdot f(\alpha) .$$

Les deux courbes, la radiale et l'hodographe, se correspondent par une transformation ponctuelle sur le rayon vecteur:

$$r^3 = C \cdot \rho .$$

Exemples. — 1° Correspondance entre cercles concentriques.

2° A une parabole de foyer O, dont la radiale est la courbe

$$\rho \cos^3 \alpha = a ,$$

correspond l'hodographe d'équation polaire:

$$r \cos \theta = \text{const} ,$$

c'est-à-dire une droite.

3° A une conique de foyer O

$$\rho = p(1 - e^2 \cos^2 \alpha)^{-\frac{3}{2}}$$

correspond un hodographe qui est une conique de centre O:

$$r\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \theta} = \text{const} ;$$

$$x^2(1 - e^2) - y^2 = \text{const} .$$

4° A la spirale logarithmique d'équation naturelle

$$\rho = ae^{m\alpha}$$

correspond l'hodographe

$$r = be^{\frac{1}{3}m\theta} ,$$

qui est une nouvelle spirale logarithmique.

5° A l'hypocycloïde à trois rebroussements

$$\rho = a \sin 3\alpha ,$$

correspond l'hodographe d'équation polaire

$$r^3 = \mathrm{A} \sin 3\alpha ;$$

C'est la cubique de Tschirnhausen, caustique de parabole, inverse d'orthogénide.

6° La spirale d'Archimède est l'hodographe associé ainsi à une trajectoire d'équation naturelle

$$\rho = \alpha^3 \times \mathrm{const} ,$$

c'est-à-dire à une développante supérieure de cercle.

7° A la chaînette

$$\rho \cos^2 \alpha = a ,$$

correspond l'hodographe:

$$r \cos^{\frac{2}{3}} \theta = \mathrm{const} .$$

11. — Pendule à tension constante.

Déterminer la courbe Γ sur laquelle il faut enrouler le fil qui soutient le pendule simple restant dans un plan vertical, pour que la tension du fil soit constante.

La courbe (Γ) est évidemment la développée d'une courbe à pression constante pour le mouvement du point pesant.

L'équation *naturelle* de la courbe à pression constante est:

$$\rho = \frac{2\mathrm{A}}{(\cos \alpha - \mathrm{N})^3} ;$$

en dérivant, on obtient l'équation naturelle de la courbe du pendule à tension constante:

$$\rho = \frac{\mathrm{B} \sin \alpha}{(\cos \alpha - \mathrm{N})^4} .$$