Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE ROLE DE LA THÉORIE DES GROUPES EN GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE DIRECTE

Autor: Bouligand, Georges

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28023

CONFÉRENCES INTERNATIONALES DE TOPOLOGIE *

(suite et fin)

LE ROLE DE LA THÉORIE DES GROUPES EN GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE DIRECTE [1]

PAR

Georges BOULIGAND (Poitiers).

1. — Avec M. Karl MENGER, on peut lier aux fonctions réelles les recherches que j'ai faites ou conduites pour soumettre la Géométrie différentielle aux méthodes directes. En 1925, j'avais obtenu ce théorème, que j'énonce ici pour trois dimensions: « *Une suite de fonctions harmoniques, bornées dans leur ensemble sur le domaine ouvert* D, *y converge vers une fonction harmonique s'il y a convergence en une infinité de points de* D, *ayant un point* O *de* D *pour point d'accumulation, pourvu que, dans un cône droit de sommet* O, *tout autre cône droit de sommet* O, *d'ouverture et de hauteur arbitrairement petites contienne des points de convergence* » [2].

Cette condition se distingue de celle d'une suite de fonctions holomorphes $f_n(z)$, assurée dans le domaine D du plan (z) dès qu'elle se produit en une infinité de points de D ayant le point O de D comme point d'accumulation [3]. Il existe en ce dernier cas (contrairement au cas précédent) une condition purement topologique de convergence, ce qui sollicite déjà l'attention vers les champs d'invariance.

---

* Ces conférences ont eu lieu à l'Université de Genève, du 21 au 25 octobre 1935, sous la présidence de M. Elie CARTAN, Membre de l'Institut.

[1] Conférence faite le 25 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie.*

[2] G. BOULIGAND, Fonctions harmoniques (*Mémorial Sc. Math.*, XI, p. 20).

[3] Cf. P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales* (Gauthier-Villars, 1927, nº 16, p. 30). Le nº 121 de cet ouvrage énonce une condition de convergence pour une suite de fonctions holomorphes $f_n(z_1, z_2)$, indépendamment de mon résultat ci-dessus. Je suis revenu sur ce sujet au *Bull. Ac. Roy. des Sc. de Belgique*, t. XXI, séances des 2 février et 6 avril 1935.

2. — A un autre titre, les fonctions réelles intervinrent quand pour l'étude de propriétés locales (tangence, courbure généralisées), j'attachai dans l'espace euclidien, à tout point d'accumulation d'un ensemble ponctuel, certaines collections de demi-droites, droites, plans, cercles, ..., autant de *fonctions multiformes* [4] au sens actuel très large de ce terme; M. C. KURATOWSKI en a défini la semi-continuité sous ses diverses espèces. Indépendamment, l'une des collections citées (le paratingent), par rapprochement avec les résultats de M^lle^ CHARPENTIER sur les intégrales de $y' = f(x, y)$ dans leur dépendance vis-à-vis du point dont elles partent, me fit rencontrer la *semi-continuité supérieure d'inclusion* [5].

3. — Je définis maintenant les collections citées. Soit O un point d'accumulation de l'ensemble ponctuel E. Une demi-droite OT est dite *demi-tangente* en O à E, s'il existe une suite infinie $\{ M_i \}$ de points de E telle que les distances OM_i et les angles $\widehat{M_i O T}$ tendent en même temps vers zéro. Une droite $T'T$ passant par O est dite *paratingente* si elle est limite d'une suite infinie de droites $T'_i T_i$ portant chacune une corde $M_i N_i$ dont les extrémités appartiennent à E et tendent vers O. La collection des demi-tangentes est le *contingent* (ctg.), celle des paratingentes le *paratingent* (ptg.).

Tout plan passant par O et limite de plans contenant chacun trois points L_i, M_i, N_i, non alignés de E tendant vers O sera dit biparatingent. Sur la collection de ces plans, le *biptg.*, M. J. MIRGUET a montré l'intérêt de prélever ceux provenant de triplets dont les trois accouplements engendrent au moins deux ptg^tes^ distinctes. La collection ainsi filtrée est le *biptg. réduit* [6].

Toute droite passant par O, limite de droites portant chacune trois points de E tendant vers O sera dite une ptg^te^ seconde.

---

[4] G. BOULIGAND, *C. R. Ac. Sc. Paris*, 12 juin 1933 (t. 196, p. 1767 et ss.).

[5] G. BOULIGAND, Sur l'idée d'ensemble d'accumulation (*Ens. math.*, t. 29, 1931, p. 246); Sur la semi-continuité d'inclusion (*Ens. math.*, t. 31, 1933, p. 14-22). Une bibliographie plus complète est donnée au fasc. LXXI du *Mémorial* (n° 6), p. 10-15 et note II, p. 53).

[6] J. MIRGUET, Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales directes du premier ordre (Thèse, Paris, 1934 ou *Ann. Ec. Norm.*, 3, LI, 1934, p. 199-243).

D'où une nouvelle collection, le *ptg. second.* Ces notions sont valables en géométrie affine (espace cartésien).

Dans l'espace euclidien, on peut former des collections de figures plus variées (cercles, sphères, hélices circulaires, ...). Retenons ici le *ctg. circulaire* relatif au point O et à la demi-tangente OT: il comprend les cercles limites de cercles tangents en O à OT et portant un point de E tendant vers O[7]; et le *ptg. circulaire* relatif au point O, formé des cercles limites de cercles passant par trois points de E tendant vers O.

4. — Apparentées dans leur essence aux plus grande et plus petite limites d'une suite et aux nombres dérivés d'une fonction, ces notions s'appliquent comme le point d'accumulation, à tout ensemble ponctuel[8]. Il est important d'en déterminer les champs d'invariance.

En effet, devant l'abondance des résultats mathématiques, une œuvre de coordination se poursuit, pour préciser les hypothèses et dégager le pourquoi des faits. Cette œuvre a fini par s'imposer, en Géométrie infinitésimale, après la découverte par M. Lebesgue (1899) des surfaces qui sans contenir la moindre portion de droite sont isométriques au plan, et la découverte par Juel de classes étendues de variétés jouissant de propriétés qu'on croyait réservées aux variétés algébriques[9].

Pour les questions de causalité ainsi posées, l'idée de groupe donne un guide. Dans un champ défini de prémisses (l'espace euclidien, par exemple) soit P une proposition tirant d'un faisceau h d'hypothèses, non toutes essentielles, une conclusion c préalablement stipulée. Réduire h, ou encore, trouver les conditions les plus larges *pour* P *vraie*, c'est prendre toutes les modifications (des objets soumis à P) menant d'un cas d'exactitude

---

[7] On pourra remplacer *circulaire* par *hémi-circulaire* lorsqu'il sera commode de se limiter à la demi-conférence qui, par rapport au plan normal en O, est du même côté que OT.

[8] Les deux premières d'entre-elles (ctg. et ptg.) ont été considérées indépendamment par M. F. Severi en vue d'un prolongement de la Topologie (voir ses indications bibliographiques aux *Annali di Mat.*, 4, XIII, 1934-35, p. 1-35). La considération des *cordes impropres* remonte d'ailleurs à M. B. Levi, dans le cas d'une courbe algébrique (*Acc. R. Sc.*, Torino, 1898). Mais tout l'intérêt se porte vers le recours constant à des notions de ce genre, à titre universel, pour la formation d'un système.

[9] Voir l'exposé de M. Paul Montel (*Bull. Sc. Math.*, mars 1924, 2, XLVIII, p. 109-128).

à un autre. *Leur famille est un groupe*, étendant le champ d'exactitude et refoulant les hypothèses accessoires, groupe qu'on peut donc appeler: *domaine de causalité de* P (notion extensible à plusieurs propositions simultanées) [10]. On peut concevoir le fractionnement de l'activité géométrique vers des énoncés disjoints, en vue d'une extension du domaine de causalité de chacun d'eux, extension qui peut comporter une revision de prémisses, comme le suggèrent les énoncés euclidiens transposables sans spécification de la métrique aux variétés de Riemann ou de Finsler (exemple: constance de la longueur d'un arc minimum restant orthogonal aux déplacements de ses extrémités). Mais la méthodologie disjonctive ralentirait le travail. Il vaut mieux encadrer les résultats dans des groupes familiers, inclus dans le *groupe topologique général* G des transformations ponctuelles continues et biunivoques opérant entre portions d'espaces cartésiens (on se limite ici au point de vue local, ce qui dispense de distinguer G du groupe analogue extrait d'une variété de Riemann). C'est avec René Baire qu'on prit conscience du groupe G, en distinguant *les propriétés descriptives* de caractères (rectificabilité d'un arc, annulation de la mesure d'ordre n dans l'espace à n dimensions) altérables dans G.

5. — A ce tournant se présente le sous-groupe G_1 de G, qui en retient les transformations douées d'une transformation linéaire tangente, non dégénérescente, continûment répartie. De ce groupe G_1 *(groupe de la topologie restreinte du premier ordre)* nous prendrons encore le modèle concret fourni par la représentation analytique dans l'espace cartésien.

Quant à G_1, sont invariantes les propriétés suivantes, en un point d'accumulation de deux ensembles ponctuels: *a)* communauté du ctg.; *b)* communauté du ptg.; *c)* communauté du biptg. réduit [11]. De ces propriétés, la première est invariante,

---

[10] Voir le début de l'*Introd. à la Géom. inf. directe* (GID) et des *Premières leçons sur la Théorie des groupes* (Paris, Vuibert).

[11] Pour *a*), *b*), cf. GID, n^{os} 69 et 74, et pour *c*), ma communication de juillet 1935 à Liège « Sur quelques notions topologiques restreintes » (*Bull. Soc. Roy. Sc. Liége*, 4^{me} année, p. 219-223).

par le groupe, englobant G_1, des transformations de G ayant au sens de Stolz une transformation linéaire tangente *non dégénérescente*, continue ou non : soit le groupe G_1^{Stolz} [12]. Demander l'existence de la transformation linéaire tangente, au sens de Stolz revient à supposer les coordonnées (X, Y, Z) du point conséquent fonctions *différentiables au sens de Stolz* [13] des coordonnées (x, y, z) du point antécédent ; cette condition est plus restrictive que l'existence (sans intérêt, faute d'invariance) de dérivées partielles du premier ordre.

La propriété *c*) du biptg. réduit n'appartient pas au biptg. excluant les triplets alignés sans exclure les triplets *singuliers* (ceux où l'existence d'une direction limite pour un côté impose la même direction limite aux deux autres). Le biptg. ainsi défini est invariant, non plus par G_1, mais seulement par les transformations localement bicontinues du groupe projectif. Ce même biptg. englobe toutes directions de plans, quand E est une surface $z = f(x, y)$ dont le ptg. en chaque point est l'ensemble des droites d'un plan : cette indétermination de la direction limite du plan d'un triplet permet la formation des polyèdres que Schwarz faisait tendre vers une portion ϖ de cylindre de révolution sans que les aires polyédrales avoisinent l'aire de ϖ. Par contre, pour une surface de la classe précédente, le biptg. réduit est-il formé de l'unique plan des ptg$^{\text{tes}}$ [14].

En un point d'accumulation commun à deux ensembles ponctuels, le rôle des triplets alignés dans la définition du ptg. second entraîne son caractère projectif : son application la plus importante est la définition locale d'une surface convexe, par la condition que le ptg. second est vide [15].

6. — Ayant étudié l'invariance du ctg., du ptg., du biptg., du biptg. réduit, notions concernant le contact du premier ordre, examinons les notions relatives à des contacts du second ordre

---

[12] J'ai signalé ce groupe au début de mon mémoire « Sur la Topologie restreinte du second ordre » (*Bull. Soc. Math.*, t. LX, 1932, p. 228).

[13] M. Maurice Fréchet a traité de cette importante notion aux *Nouvelles Annales* (1912, p. 385 et 433 ; 1919, p. 215).

[14] A la fin du travail cité de J. Mirguet, voir des conditions suffisantes pour la planéité du ptg., obtenues par l'entremise du biptg. réduit.

[15] *G. I. D.*, ch. XIV et Mirguet, C. R. 7 décembre 1936.

et dont le champ d'invariance dépasse le groupe projectif où se localise le ptg. second [16].

M. E. Vessiot m'écrivait, fin 1930: « Ce que vous faites consiste à effectuer, avec S. Lie, des prolongements différentiels successifs d'ensembles considérés comme des multiplicités ponctuelles, en élargissant convenablement le sens du mot différentiel ». En fait, ce sont bien des prolongements du premier ordre de E qu'on obtient, du point de vue de Stolz, en prenant le ctg., du point de vue de la différentielle classique, en prenant le ptg. On peut assimiler ces prolongements à de nouveaux ensembles ponctuels d'un espace obtenu en adjoignant à un point de l'espace initial un vecteur issu de ce point, ce qui donne un élément qu'on peut appeler un *point-vitesse.* A chaque homéomorphie θ extraite de G_1 ou de G_1^{Stolz} dans l'espace initial S est attachée dans l'espace S′ des points-vitesses une nouvelle homéomorphie θ' définie comme suit:

$$X = f(x, y, z), \quad Y = g(x, y, z), \quad Z = h(x, y, z). \tag{1}$$

$$\begin{cases} U = uf_x + vf_y + wf_z, \\ V = ug_x + vg_y + wg_z, \\ W = uh_x + vh_y + wh_z, \end{cases} \tag{2}$$

pour le cas où S est à trois dimensions [17]. Pour que θ' appartienne au groupe G_1' qui joue dans S′ le même rôle que G_1 dans S, il faut et suffit que les différentielles de U, V, W existent et soient continues quant au point (x, y, z), c'est-à-dire que f, g, h aient des dérivées secondes continues. Le jacobien de notre transformation à six dimensions, étant le carré de celui de θ, n'introduit pas de condition. A côté du groupe G_2 ainsi défini, on aperçoit le groupe G_2^{Stolz}, obtenu en soumettant les dérivées premières de f, g, h à la différentiabilité stolzienne.

La topologie restreinte du second ordre énonce des propriétés invariantes par G_2 ou G_2^{Stolz}, suivant les problèmes. Au mouvement d'un point dont la vitesse, bien déterminée à chaque

---

[16] Citons aussi, dans le groupe projectif, le *ctg. planaire* (ou d'osculation), dont M. B. Segre vient de préciser la définition (*R. Acc. d'Italia*, vol. VI, p. 1209).

[17] Dans G_1^{Stolz}, cela résulte du n° 8, p. 396-398, du mémoire cité de M. Fréchet.

instant, est continue, une transformation de G_1 fait correspondre un mouvement pour lequel sont garanties l'existence et la continuité de la vitesse; sa continuité disparaîtrait pour G_1^{Stolz}. Si la transformation provient de G_2, l'existence et la continuité se conservent pour l'accélération comme pour la vitesse. Dans G_2^{Stolz} la continuité de l'accélération n'est plus invariante.

7. — Supposons que les équations (1) définissent une transformation $M = \mathfrak{T}(m)$ de G_2^{Stolz}. Les quantités f_x, f_y, f_z ont chacune une différentielle au sens de Stolz: le tableau des neuf coefficients différentiels de ces trois formes est alors symétrique par rapport à sa diagonale principale [18]. De plus, on peut écrire

$$f(x+p\,,\,y+q\,,\,z+r) = \\ = f(x\,,\,y\,,\,z) + pf_x + qf_y + rf_z + \varphi_2(p\,,\,q\,,\,r)\ , \tag{3}$$

φ_2 désignant un polynôme homogène quadratique dont les coefficients ont des limites quand p, q, r tendent vers zéro. Ces limites sont respectivement les dérivées secondes

$$f_{x^2} \quad f_{y^2} \quad f_{z^2} \quad f_{yz} \quad f_{zx} \quad f_{xy}$$

dont l'existence au point isolé x, y, z ne justifierait pas la relation (3).

Soit a un point d'accumulation de l'ensemble e dans l'espace (x, y, z). Par $M = \mathfrak{T}(m)$, on passe de e à un ensemble E de l'espace (X, Y, Z), avec $A = \mathfrak{T}(a)$ pour point d'accumulation. Appliquons (3) à f, g, h: les trois relations obtenues [19] se condensent dans l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{AM} = \mathfrak{T}(m) - \mathfrak{T}(a) = \mathfrak{L}(\overrightarrow{am}) + \frac{1}{2}\left[\mathfrak{Q}(\overrightarrow{am}) + \chi(\overrightarrow{am})\right]\ , \tag{4}$$

$\mathfrak{L}$ étant l'opérateur de la transformation linéaire tangente, et $\mathfrak{Q}$ un autre opérateur faisant passer de $\overrightarrow{am}$ (p, q, r) au vecteur dont la première composante serait

$$p^2 f_{x^2} + q^2 f_{y^2} + r^2 f_{z^2} + 2qr f_{yz} + 2rp f_{zx} + 2pq f_{xy}\ .$$

---

[18] Voir aux *Nouv. Ann.* de 1912, dans le mémoire cité de M. Fréchet, le n° 15, p. 440-443.

[19] La première de ces relations, par exemple, se déduit par intégration des trois relations obtenues en évaluant l'accroissement de f_x, celui de f_y et celui de f_z, compte tenu de ce que chacune de ces fonctions est différentiable au sens de Stolz.

Quant à χ, c'est un opérateur analogue, à coefficients non plus constants, mais infiniment petits avec $\overrightarrow{am}$.

Soit maintenant une suite $\{ m_i \}$ de points de e tendant vers a. A chaque point de cette suite attachons une valeur ε_i du paramètre temporel τ. Supposons qu'il existe une suite évanescente $\{ \varepsilon_i \}$ permettant d'écrire pour tout entier i

$$\overrightarrow{am_i} = \varepsilon_i \vec{v} + \frac{\varepsilon_i^2}{2} \left(\vec{j} + \vec{\omega}_i \right) \qquad \text{avec} \quad \lim_{i \to \infty} \vec{\omega}_i = 0 \,. \tag{5}$$

Ce cas est celui où la suite des positions m_i du mobile aux instants ε_i détermine univoquement au temps zéro une vitesse et une accélération, circonstance invariante dans G_2^{Stolz}[20]. Il est alors facile de voir que le contingent circulaire en a, pour la demi-tangente portant $\vec{v}$, de la suite $\{ m_i \}$ est formé d'un cercle unique. Inversement, *si le contingent circulaire pour la suite* $\{ m_i \}$, *douée en* a *d'une seule demi-tangente, est formé d'un cercle unique, de rayon* $\mathcal{R} \neq 0$, *on peut attacher aux points* m_i *des instants* ε_i *assurant une vitesse et une accélération* (uniques) *au temps zéro.* Car l'hypothèse équivaut à l'existence d'égalités géométriques

$$\overrightarrow{am_i} = \left| am_i \right| \vec{t} + \frac{\overline{am_i}^2}{2\mathcal{R}} \left(\vec{n} + \vec{\omega}_i \right) \qquad \text{avec} \quad \lim_{i \to \infty} \vec{\omega}_i = 0$$

en appelant $\vec{t}$ le vecteur unitaire de la demi-tangente, $\vec{n}$ celui de la demi-normale allant de a vers le centre; il suffit donc de prendre $\varepsilon_i = \left| am_i \right|$ pour avoir un mouvement de vitesse $\vec{t}$ et d'accélération $\dfrac{\vec{n}}{\mathcal{R}}$ (c.q.f.d.).

8. — En cinématique du mouvement continu, on conçoit sur une trajectoire divers horaires. A un même instant, pour une position et une vitesse $\vec{v}$ données du mobile, si $\vec{j}$ est une détermination possible de l'accélération, les autres seront $\vec{j} + \lambda\vec{v}$, où λ est un scalaire.

---

[20] Introduite dans mon article « Sur la topologie restreinte du second ordre » (*Bull. Soc. Math.*, t. LX, 1932, p. 228-239), cette généralisation de notions cinématiques dans des conditions abandonnant la continuité du mouvement pour ne retenir que des suites de positions du mobile, heurte un peu les habitudes acquises. Elle est cependant conforme à l'esprit de notre étude.

Pareillement, dans le cas actuel, soit $\{m_i\}$ une suite de points donnant lieu aux relations (5). On aura indifféremment

$$\overrightarrow{am_i} = \varepsilon_i' \vec{v} + \frac{\varepsilon_i'^2}{2}\left(\vec{j}' + \vec{\omega}_i'\right), \tag{6}$$

où ε_i' est un infiniment petit équivalent à ε_i, puisqu'on a même vitesse en a. En outre, le plan $(\vec{v}', \vec{j}')$ coïncide avec le plan $(\vec{v}, \vec{j})$, qui a le rôle d'unique plan osculateur pour la suite. D'où

$$\vec{j}' = \vec{j} + \lambda \vec{v},$$

où λ est un scalaire. Un horaire donnant lieu à l'accélération $\vec{j}'$ s'obtient en prenant

$$\varepsilon_i' = \varepsilon_i - \frac{\lambda \varepsilon_i^2}{2}.$$

De ces accélérations, une seule est orthogonale à $\vec{v}$. Prenons l'unité de temps de manière que ε_i soit équivalent à $|am_i|$; nous aurons $\vec{v}^2 = 1$; dans le plan $(\vec{v}, \vec{j})$, soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire orthogonal à $\vec{v}$ et faisant un angle aigu avec tout vecteur $\vec{j} + \lambda\vec{v}$, le cercle tangent en a au vecteur $\vec{v}$, contenu dans le plan $(\vec{v}, \vec{j})$ et ayant son centre c donné par $\overrightarrow{ac} = \mathcal{R}\vec{n}$ où $\mathcal{R}$ est l'inverse du produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{j}$, sera l'unique cercle osculateur de notre suite.

Finalement pour toutes les suites de positions m_i ayant en a une même demi-tangente at et qu'on soumet à un horaire faisant correspondre au point a une vitesse $\vec{v}$ bien déterminée portée par at, il y aura un seul et même cercle osculateur dans l'unique cas où toutes accélérations relatives à des suites partielles arbitrairement prélevées sur les suites données sont de la forme $\vec{j} + \lambda\vec{v}$, le coefficient λ étant seul indéterminé.

9. — Lorsqu'on effectue la transformation $M = \mathcal{T}(m)$ du groupe G_2^{Stolz}, à la vitesse $\vec{v}$ correspond la vitesse $\vec{V} = \mathcal{L}(\vec{v})$, à l'accélération $\vec{j}$, pour la vitesse $\vec{v}$, correspond l'accélération $\vec{J} = \mathcal{L}(\vec{j}) + \mathcal{Q}(\vec{v})$, où $\mathcal{Q}$ est l'opérateur homogène quadratique déjà rencontré dans la relation (4) du nº 7. Si donc au temps τ,

deux mobiles occupant la même position et animés de la même vitesse, ont les accélérations $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$, leurs transformés auront des accélérations $\vec{J}_1$ et $\vec{J}_2$ telles que

$$\vec{J}_2 - \vec{J}_1 = \mathcal{L}(\vec{j}_2) - \mathcal{L}(\vec{j}_1) .$$

Dans les conditions indiquées, la différence géométrique des accélérations subit donc la transformation linéaire tangente.

10. — Ces diverses remarques montrent d'abord l'invariance par G_2^{Stolz} (a fortiori par G_2) de la communauté du contingent circulaire (restreint à des cercles de rayon non nul) pour deux ensembles ponctuels, relativement à un point d'accumulation et une demi-tangente qui leur sont communs. Il suffit d'observer que la suite des m_i donnant lieu aux relations (5) se transforme en la suite des M_i donnant lieu aux relations analogues

$$\overrightarrow{AM}_i = \varepsilon_i \vec{V} + \frac{\varepsilon_i^2}{2}\left(\vec{J} + \vec{\Omega}_i\right) \qquad \lim_{i \to \infty} \vec{\Omega}_i = 0$$

avec

$$\vec{V} = \mathcal{L}(\vec{v}) \qquad \vec{J} = \mathcal{L}(\vec{j}) + \mathcal{Q}(\vec{v})$$

On s'achemine vers le théorème de Meusnier en considérant un ensemble ponctuel e sur lequel le passage avec une vitesse donnée $\vec{v}$ d'un mobile au point d'accumulation a, mobile qui reste sur l'ensemble, ne donne d'autres accélérations que celles représentées par des vecteurs d'origine a et d'extrémités situées dans un plan ϖ parallèle à $\vec{v}$. Alors, pour le correspondant E de e par la transformation $M = \mathcal{C}(m)$ de G_2^{Stolz}, nous aurons au point d'accumulation $A = \mathcal{C}(a)$, pour chaque mobile y passant avec la vitesse $\mathcal{L}(\vec{v})$, la propriété analogue avec un plan Π transformé de ϖ par la transformation linéaire tangente pour le couple (a, A).

D'où un genre de propriété invariante, que nous allons interpréter. Lorsque dans le plan ϖ, l'extrémité de l'accélération $\vec{j}$ reste sur une parallèle à $\vec{v}$, on a un cercle osculateur fixe. Et ce cercle se déplace sur une sphère σ, inverse du plan ϖ par rapport au point a (eu égard à la relation $\dfrac{1}{\mathcal{R}} = \vec{n} \cdot \vec{j}$ du n° 8), quand l'extrémité de l'accélération varie *ad libitum* dans ϖ. La propriété invariante en question est donc encore le fait pour le contingent circulaire de se composer de cercles tangents en a du vecteur $\vec{v}$, sur la surface d'une même sphère σ.

Cette sphère σ sera dite *sphère de Meusnier* de l'ensemble e, pour a et la demi-tangente at portant $\vec{v}$. D'après cette définition, on peut énoncer la propriété d'invariance qui précède sous la forme suivante: un ensemble e pour lequel la sphère de Meusnier relative à $[a, \vec{v}]$ est unique se transforme dans le groupe G_2^{Stolz} en un ensemble E pour lequel la sphère de Meusnier relative à $[\mathfrak{T}(a), \mathfrak{L}(\vec{v})]$ est encore unique.

L'inverse du rayon de la sphère de Meusnier va continuer à s'appeler: *courbure normale.*

11. — J'ai donné en 1932 pour l'unicité de la sphère de Meusnier relative à (a, at) la condition suivante: il passe par a une perpendiculaire $z'z$ à at telle que le demi-plan $(z'z, at)$ ne contienne qu'une seule position limite, avec rayon non nul, pour un demi-cercle C_m ayant son diamètre ab porté par $z'z$ et passant par un point m de e qui tend vers a [21].

La condition précédente est invariante par G_2^{Stolz}, ce que M. Elie Cartan a démontré comme suit: « Considérons un ensemble ponctuel rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, O étant un point d'accumulation de l'ensemble, Ox une demi-tangente en O. La condition de M. Bouligand revient à supposer que, si pour différentes suites de points de l'ensemble tendant vers O, les trois quantités y/x, z/x, $z/(x^2+y^2+z^2)$ tendent les deux premières vers zéro et la troisième vers une quantité finie l, cette dernière limite est unique. Il revient évidemment au même de substituer à la quantité $z/(x^2 + y^2 + z^2)$ la quantité z/x^2, et alors l'énoncé ne fait plus intervenir la propriété des axes d'être rectangulaires. — Cela posé, effectuons une transformation de la topologie restreinte du second ordre [22].

---

[21] G. Bouligand, *Journ. de Math.*, 9, t. XI, 1932, p. 385-387. A cette forme de condition d'unicité, on rattache le théorème de Meusnier pour les courbes intégrales d'une équation de Monge (*C. R. des Séances de la Soc. Math.*, 1934, p. 32-34).

[22] Ou plus précisément de G_2^{Stolz}, comme je le signalais au début de ce paragraphe.

Nous pouvons supposer que l'origine O est conservée, que la droite Ox est transformée en une ligne admettant OX pour tangente et que le plan $z = 0$ est transformé en une surface admettant $Z = 0$ pour plan tangent. Toute suite de points de l'ensemble pour laquelle y/x et z/x tendent vers zéro est transformée en une suite de points pour laquelle Y/X et Z/X tendent vers zéro. On a de plus

$$\frac{Z}{X} = \frac{hz + R(x, y, z)}{\left[ax + by + cz + P(x, y, z)\right]^2},$$

où h, a, b, c sont des constantes, P et R des polynômes homogènes du second degré dont les coefficients tendent vers des limites déterminées lorsque (x, y, z) tendent vers zéro. Si α est la limite du coefficient de x^2 dans R, on voit que y/x et z/x tendant vers zéro et z/x^2 tendant vers l, la quantité Z/X^2 tend vers la limite $(hl + \alpha)/\alpha^2$. Ou bien dans l'ensemble donné et son transformé satisfont simultanément à la condition de M. Bouligand, ou bien aucun d'eux n'y satisfait. »[23]

12. — Tel que je l'ai formulé en 1932, le théorème de Meusnier est donc invariant dans G_2^{Stolz}. Il serait d'ailleurs superflu, avec certains auteurs, de supposer que le plan normal à $z'z$ contient le paratingent de e en a [24]. On peut enrichir *ad libitum* le paratingent à l'origine d'un ensemble e admettant ce point pour point d'accumulation et situé tout entier entre les surfaces

$$2z = x^2 + y^2 \qquad \text{et} \qquad 2z = x^2 + y^2 + z^2$$

condition d'après laquelle pour une demi-tangente à l'origine, l'ensemble e a même sphère de Meusnier que chacune des surfaces précédentes. Cette remarque se généralise aisément.

13. — Si le contingent à l'origine de la surface $z = f(x, y)$, passant en ce point, comprend toute demi-droite du plan $z = 0$ et si la condition d'unicité de la sphère de Meusnier a lieu pour

---

[23] E. CARTAN, *C. R. Ac. Sc.*, t. XXI, séance du 21 oct. 1935.

[24] B. SEGRE, Il teorema di Meusnier nella geometria degli insiemi (*R. Acc. d'Italia*, vol. VI, 1935, p. 1205-1220, cf. n°° 5 et 8); H. BUSEMANN et FELLER, Krümmungseigenschaften Konvexer Flächen (*Acta Math.*, t. 66; voir le second énoncé du £ 2).

chacune de ces demi-tangentes avec un rayon non nul, on déduit d'un théorème de Janiszewski que la courbure normale est fonction continue de la demi-tangente correspondante. En même temps, l'on justifie pour $f(x, y)$ la forme suivante:

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \rho^2 \left[c(\omega) + \varepsilon\right] \qquad (x = \rho \cos \omega , \quad y = \rho \sin \omega) .$$

c étant continue et de période 2π; quant à ε, c'est une fonction continue d'un point, infiniment petite avec la distance ρ de l'origine à ce point.

La courbe $\rho^2 c(\omega) = \pm 1$ est la limite d'une courbe obtenue en prenant la section de la surface $z = f(x, y)$ par le plan $2z = h$ et la soumettant à une homothétie de rapport $|h|^{-1/2}$ et de centre O. Cette courbe $\rho^2 c(\omega) = \pm 1$ s'obtiendrait encore en portant sur chaque demi-tangente issue de O, la racine carrée du rayon de la sphère de Meusnier correspondante. Pour que cette courbe se réduise à une conique, il suffit comme je l'ai montré en 1932[25] que sur une portion σ de la surface $z = f(x, y)$, dont le paratingent se réduit en chaque point à un plan, il corresponde à chaque élément semi-linéaire une courbure normale dépendant continument de cet élément linéaire, ou encore du point et de la demi-tangente correspondante pris en bloc.

La route suivie pour cette démonstration consiste à prouver que toute courbe de la portion σ de surface qui, sur l'un de ses plans tangents, se projette suivant un arc à courbure continue possède elle-même une courbure continue. On quitte ici le champ d'invariance de G_2^{Stolz} pour celui de G_2.

La démonstration citée apporte d'ailleurs, pour les transformations particulières conservant les parallèles à l'axe des z et les longueurs sur ces droites, une réponse affirmative au second des deux problèmes suivants, que nous rapprochons à dessein:

PROBLÈME P_1. — On considère le groupe G′ des transformations $M = \mathfrak{T}(m)$ qui de tout arc ayant une seule ptg^te en chaque

[25] G. BOULIGAND, *Journ. de Math.*, 9, t. XI, 1932, p. 137-141. L'indicatrice généralisée définie par MM. H. Busemann et W. Feller dans leur mémoire cité des *Acta Mathematica*, où les auteurs considèrent une surface convexe, est un cas particulier de la courbe $\rho^2 c(w) = \pm 1$ à laquelle conduit l'unicité de la sphère de Meusnier pour chacune des demi-tangentes issues d'un point de la surface.

point mènent à un arc ayant une seule ptg$^{\text{te}}$ en chaque point, cela de telle manière qu'à un élément (point, ptg$^{\text{te}}$) du premier espace corresponde un élément (point, ptg$^{\text{te}}$) du second, suivant une loi biunivoque et continue. Le groupe G$'$, qui contient G_1, se réduit-il à G_1 ?

Problème P_2. — On considère le groupe G$''$ des transformations $M = \mathcal{T}(m)$ qui de tout arc à courbure continue mènent à un arc à courbure continue, cela de telle manière qu'à un élément (point, cercle osculateur) du premier espace corresponde un élément analogue du second, suivant une loi biunivoque et continue. Le groupe G$''$, qui contient G_2, se réduit-il à G_2 ?

14. — Il y a lieu de nous arrêter un peu sur les notions envisagées dans P_1 et P_2. Lorsqu'on prend d'emblée le groupe G_1, l'attention se porte sur le ptg. et les classes de courbes qu'il permet de distinguer: courbes dont les ptg$^{\text{tes}}$ sont intérieures à un cône réel non dégénérescent du second ordre; courbes dont le ptg. ne contient qu'une seule droite[26]. Mais si, parti de G_1^{Stolz}, on revient à son sous-groupe G_1, on envisagera d'abord le ctg. Un type de condition invariante dans G_1^{Stolz} est le fait pour le ctg. en un point de se trouver dans quelque demi-cône réel, non dégénérescent du second ordre, ou ce qui revient au même, de rester dans un demi-cône strictement convexe, c'est-à-dire se laissant inclure aussi dans un demi-cône non dégénérescent du second ordre, de même sommet. Pour un champ continu de tels demi-cônes γ_M, il y a identité entre les deux classes suivantes d'arcs simples:

1° Ceux dont le ctg. postérieur est formé de demi-droites situées dans ou sur γ_M ;
2° Ceux dont les ptg$^{\text{tes}}$ portent une demi-droite située dans ou sur γ_M, cela a lieu pour chacune d'elles.

En particulier, ainsi que l'avait établi aux termes près, dès 1927, M. G. Valiron par un principe donnant sans restriction

---

[26] Un continu possédant une de ces propriétés est nécessairement une courbe, en vertu des lemmes d'univocité. Pour l'énoncé général de ces lemmes, cf. G. Bouligand, « Sur quelques applications de la théorie des ensembles à la géométrie infinitésimale » (*Bull. Ac. polon. des Sc. et des Lettres*, série A, 1930, p. 410-411).

la clef de l'identification précédente[27], un arc simple dont le ctg. postérieur est formé d'une seule demi-droite continûment répartie a aussi son ptg. réduit à une droite (cela, en chaque point).

Comme il était à prévoir, une restitution convenablement conduite de la continuité nous ramène donc d'éléments invariants dans G_1^{Stolz} à des éléments invariants dans G_1.

15. — Pareillement, si l'on étudie dans G_2^{Stolz} un arc à ptg[te] unique en chaque point, on prendra son ctg. circulaire. Supposons que le ctg. circulaire postérieur[28] se réduise à un seul cercle dont le rayon dépasse une longueur fixe, cela de manière qu'en prenant le point de contact M comme pôle d'inversion et une puissance constante, la droite transformée du cercle dans cette inversion soit continûment répartie en fonction du point M. Cela revient à dire que les trois coordonnées donnent lieu, pour chaque valeur particulière s_0 de l'abscisse curviligne et pour chaque valeur courante s la dépassant, à une relation de la forme

$$x(s) = x(s_0) + (s - s_0)x'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2}\left[\xi(s_0) + \varepsilon\right],$$

où ξ est continue en s_0 tout le long de l'arc, et où ε tend vers zéro pour chaque s_0. La continuité de ξ exige alors que ε tende uniformément vers zéro le long de l'arc: sinon, il existerait une infinité de couples $(s_1, s_1 + h_1; s_2, s_2 + h_2)$, h_1 et h_2 étant positifs, et arbitrairement petits, aussi bien que $|s_2 - s_1|$, tels que la différence

$$\left| \frac{x(s_2 + h_2) - x(s_2) - h_2 x'(s_2)}{h_2^2} - \frac{x(s_1 + h_1) - x(s_1) - h_1 x'(s_1)}{h_1^2} \right|$$

[27] G. VALIRON, Sur les courbes à tangente continue qui admettent une tangente en chaque point (*Nouv. Ann.*, 4^me série, t. II, 1927, p. 48-50). Pour une étude plus systématique, voir A. MARCHAUD (*Journ. de Math.*, 9^me série, t. XII, 1933, pp. 415 et ss.). Voir aussi un mémoire de S. K. ZAREMBA, *Bull. des Sciences math.*, mai 1936.

[28] L'introduction d'un contingent circulaire unilatéral est naturelle lorsque ayant supposé l'unicité de la sphère de Meusnier pour chaque demi-tangente, on cherche à prouver ensuite le théorème d'Euler sur l'indicatrice des courbures, dans la voie suivie en 1932 au *Journ. de Math.* et reprise ici pour rattacher ce dernier théorème à la théorie des groupes.

demeure supérieure à un nombre positif fixe; cela donnerait au voisinage d'un point d'accumulation de tels couples, une inégalité incompatible avec la continuité de $\xi(s)$. Posons

$$X(s) = x(s) - x(0) - s\,x'(0) - \int_0^s (s-t)\,\xi(t)\,dt\,.$$

Pour h positif infiniment petit, la quantité

$$h^{-2}\left[X(s+h) - X(s) - h\,X'(s)\right].$$

tend uniformément vers zéro. En changeant $X(s)$ en $\pm X(s) + k^2 s^2$, on obtiendra la limite k^2. Dans le plan (s, X) le diagramme de l'une des fonctions $\pm X(s) + k^2 s^2$ part de l'origine tangentiellement à l'axe des s, avec une concavité tournée vers les X positifs: donc chacune des fonctions $\pm X(s) + k^2 s^2$ sera positive, le long de notre arc, si petit que soit k^2, ce qui ne peut avoir lieu que pour $X(s) \equiv 0$. [29] On en conclut que $\xi(s)$ est la dérivée seconde de x, à titre bilatéral.

Ces considérations sont importantes lorsqu'on veut montrer l'équivalence de diverses définitions pouvant convenir aux *courbes à courbure continue*, lesquelles jouent naturellement un rôle indispensable dans ma démonstration de 1932 du théorème d'Euler (existence d'une conique indicatrice), dont j'ai donné la référence au cours du n° 14. Le procédé d'unification le plus commode est celui qui ramène la continuité de la courbure à l'existence et à la continuité de la dérivée seconde droite de chaque coordonnée par rapport à l'arc (ce que nous venons de justifier).

Voici par exemple une propriété caractéristique des courbes à courbure continue [30], laquelle est d'ailleurs invariante dans G_2: c'est la réduction à un cercle unique de rayon non nul du ptg. circulaire en chacun de leurs points.

Une autre propriété caractéristique des mêmes courbes se

---

29 Ce principe de raisonnement est celui que Schwarz utilisait pour l'étude de la dérivée seconde généralisée introduite en théorie des séries trigonométriques. Cf. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, 3^{me} éd., p. 355-356.

30 Les courbes à courbure continue sont des cas particuliers des courbes à courbure bornée qu'on peut caractériser de diverses manières. Voir C. CARATHÉODORY, Kurven mit beschränkten Biegungen (*Sitzungsberichte der preussischen Akademie*, 1933).

présente du fait qu'on peut définir *le ctg. circulaire, second mode*, en recourant à l'espace des points-vitesses et y ramenant la notion du ctg. circulaire de l'espace (x, y, z) à celle du ctg. ordinaire d'un ensemble de points (x, y, z, u, v, w) [31]. Une suite génératrice d'un cercle unique du ctg. circulaire second mode donne aussi un cercle unique du ctg. circulaire premier mode sans que la réciproque ait lieu. Toutefois, pour une ligne à courbure continue où le ctg. circulaire premier mode se réduit à un cercle unique continûment réparti, on a la même propriété pour le ctg. circulaire second mode.

16. — Abordons maintenant P_1. On peut voir que la correspondance biunivoque et continue reliant les éléments (point, ptg^{te}) lorsque le point m décrit un arc à ptg^{te} unique reste valable quand les dits éléments proviennent d'un ensemble ponctuel quelconque. Il suffit de montrer que chaque suite de couples ponctuels m_i, n_i tendant simultanément vers un point a, en donnant une ptg^{te} unique, conserve cette propriété; ce qu'on déduit de la considération des droites $m_i n_i$ et de leurs transformées; au voisinage ε_i du point $\mathcal{C}(a)$, toutes les ptg^{tes} à ces transformées prennent une même direction limite, vu la continuité de la correspondance des éléments (point, ptg^{te}). Soient m_i, n_i, m'_i, n'_i quatre points tendant vers a, de manière que $m_i n_i$ et $m'_i n'_i$ donnent une seule et même ptg^{te}, le même fait se produisant pour $m_i m'_i$ et $n_i n'_i$, la direction de la seconde ptg^{te} ainsi obtenue étant distincte de celle de la première. Supposons enfin que les couples $m_i n'_i$ donnent aussi une ptg^{te} unique et distincte de la précédente. Dans ces conditions, nous pourrons dire que le quadruplet $m_i n_i m'_i n'_i$ est un *micro-parallélogramme* non dégénérescent. Si nous continuons à raisonner dans l'espace à trois dimensions, nous pourrons définir pareillement des *micro-parallélépipèdes* non dégénérescents et qui tendent vers m, de manière que l'on ait pour leurs arêtes trois directions limites non coplanaires [32]. On pourra donc faire correspondre aux propriétés de géométrie affine des propriétés qui seront vérifiées à la limite pour des figures infiniment voisines du point a. Et

---

[31] G. BOULIGAND, *Bull. Soc. Math.*, t. LX, 1932, p. 239-241.
[32] G. BOULIGAND, *Bull. Soc. Roy. des Sc. de Liége*, 4^{me} année, p. 219-223.

d'après nos hypothèses, ces propriétés micro-affines seront conservées par la transformation $\mathfrak{T}$. Cela montre déjà que la loi de correspondance entre une ptg$^{\text{te}}$ issue de a et sa transformée issue de $\mathfrak{T}(a)$ est celle qui relie les directions de deux droites liées par une transformation linéaire non dégénérescente.

Cela posé, pour s'assurer que G' se réduit à G_1, on va d'abord montrer qu'il n'existe qu'une seule valeur limite pour le rapport, au volume d'un domaine infiniment voisin du point a, du volume transformé [domaine infiniment voisin de $\mathfrak{T}(a)$]. Puis on montrera que cette limite est une fonction continue de a.

La première de ces propriétés se démontre par l'absurde: l'existence de deux valeurs limites distinctes pour notre rapport de volumes entraînerait celle de couples de volumes infiniment petits équivalents dont les transformés ne seraient pas des infiniments petits équivalents, ce qui serait incompatible avec l'existence des propriétés micro-affines. Il n'y a donc qu'une seule valeur $j(a)$ du jacobien. Et cette valeur eut été régie, si sa pluralité eût été possible, par la semi-continuité supérieure d'inclusion: vu son unité, elle est donc continue (c.q.f.d.).

La transformation linéaire tangente existe et est continue. D'où $G' \equiv G_1$.

17. — Le problème P_1 est donc résolu par l'affirmative. D'après les remarques du nº 14, ce problème ne serait pas altéré si au lieu d'envisager la conservation des arcs à ptg$^{\text{te}}$ unique, on envisageait celle des arcs à demi-tangente postérieure unique et continue de manière qu'un élément (point, demi-tangente) se change en un autre élément de la même classe suivant une loi biunivoque et continue. L'invariance demandée n'a lieu que dans le groupe G_1. Même résultat si l'on envisageait la conservation des mouvements qui s'accomplissent avec une vitesse déterminée et non nulle, de manière qu'il y ait correspondance biunivoque et continue des points-vitesses.

Occupons-nous maintenant des transformations du groupe G_1 qui satisfont aux conditions du problème P_2. Nous pourrons encore énoncer ce dernier sous diverses formes équivalentes. Par exemple, on peut regarder un arc doué d'une ptg$^{\text{te}}$ unique, dans l'espace (x, y, z), servant de trajectoire à un point ayant à chaque instant une vitesse déterminée, non nulle, avec une accélération tangentielle continue. Après construction d'un hodographe, nous aurons la trajectoire d'un nouveau mouvement dans l'espace (x, y, z, u, v, w), lequel est représenté dans l'espace (x, y, z, u, v, w, t) par un arc rencontrant en un seul point chaque variété $t = \text{const}$. Résoudre le problème P_2, c'est trouver parmi les transformations considérées de l'espace (x, y, z) celles qui se laissent prolonger dans l'espace (x, y, z, u, v, w, t) suivant le mode indiqué de manière qu'un arc de ce dernier espace, doué d'une demi-tangente unique et continue, et soumis aux conditions $\frac{dx}{dt} = u(t)$, $\frac{dy}{dt} = v(t)$, $\frac{dz}{dt} = w(t)$, donne par la transformation prolongée, un arc jouissant de la même propriété, la correspondance entre les éléments (point, demi-tangente) étant toujours biunivoque et continue.

Puisque nous sommes dans G_1, nous avons entre les composantes de la vitesse dans le mouvement antécédent et dans le mouvement conséquent les relations

$$
\begin{aligned}
U &= uf_x + vf_y + wf_z \,, \\
V &= ug_x + vg_y + wg_z \,, \\
W &= uh_x + vh_y + wh_z \,.
\end{aligned}
$$

Si u, v, w admettent des dérivées premières continues par rapport à t, la même propriété doit appartenir à U, V, W. Cela aura lieu notamment quand chacune des quantités u, v, w restera constante. Donc, la quantité

$$uf_x + vf_y + wf_z$$

devra posséder une dérivée par rapport à t quels que soient les coefficients constants u, v, w. Nous aurons donc à exprimer cette propriété pour chacune des dérivées partielles du premier ordre de f, g, h, quand le point x, y, z décrit une trajectoire suivant une loi impliquant l'existence d'une vitesse continue. De la solution du problème P_1 appliquée à la transformation

$$X = x \,, \quad Y = y \,, \quad Z = z \,, \quad U = u + \varphi(x, y, z) \,,$$

où φ représente l'une des dérivées partielles $f_x, \dots, h_z$, on conclut à l'existence et à la continuité des dérivées secondes de f, g, h, ce qui résout par l'affirmative le problème P_2.

Le théorème d'Euler sur l'indicatrice des courbures est donc un cas particulier d'un énoncé $G_2 = G''$ extrait de la Théorie des groupes.

18. — Terminons par des remarques concernant la réalisation des groupes que nous avons introduits. Pour obtenir une représentation concrète de G_1, nous nous sommes limités à des transformations ponctuelles opérant dans un espace cartésien. Par l'intermédiaire de ces transformations, on peut atteindre les correspondances entre deux variétés à un même nombre p de dimensions, baignant dans un espace cartésien E_{n+p} à $n+p$ dimensions $(u_1, u_2, \dots, u_{n+p})$, pour ne retenir que les propriétés de ces correspondances pouvant se lier d'une manière intrinsèque aux variétés considérées. Nous prendrons exclusivement des variétés admettant une représentation paramétrique

$$u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_p) \qquad \text{avec} \quad i = 1, 2, \dots, n+p, \qquad \text{(E)}$$

où les seconds membres ont des dérivées premières continues par rapport à l'ensemble des variables, cela de telle manière que le tableau des $\partial u_i/\partial x_j$ contienne au moins un déterminant d'ordre p non nul. D'après le théorème des fonctions implicites, on peut alors définir le voisinage d'un point sur la variété par n équations exprimant, sur l'ensemble des coordonnées $u_1, \dots, u_{n+p}$ de l'espace ambiant, n d'entre elles par des fonctions continûment dérivables du premier ordre des p autres. Au point de vue intrinsèque dans E_{n+p}, ces variétés sont encore celles dont le ptg. en chaque point contient toutes directions d'une variété linéaire L_p d'ordre p. Nous dirons en abrégé que ces variétés sont régulières du premier ordre. Sur ces variétés-mêmes, on pourra donner un sens aux notions de micro-équipollence, de micro-parallélogramme, ..., notions qu'on peut rassembler sous la dénomination de *micro-affines*. Toutes sont solidaires des suites de couples ponctuels m_i, n_i donnant naissance à une ptg$^{\text{te}}$ unique. On pourra donc concevoir les transformations de

G_1 comme opérant entre deux variétés à un même nombre de dimensions V′ et V″ de la classe précédente et en conservant les propriétés micro-affines. Au mouvement d'un point admettant sur V′ à chaque instant une vitesse déterminée, continue et non nulle, va correspondre sur V″ un mouvement doué des mêmes caractères. De cette correspondance purement ponctuelle, nous pourrons encore passer à la correspondance entre les points-vitesses, linéaire relativement aux vitesses affectant une même position. Nous aurons

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u_i}{\partial x_p}\frac{dx_p}{dt}. \qquad \text{(E')}$$

En considérant les quantités

$$y_k = \frac{dx_k}{dt}$$

comme de nouvelles variables, il pourra se faire que les $2n$ équations (E, E′) définissent dans l'espace à $2(n+p)$ dimensions une variété régulière du premier ordre. Nous dirons alors que dans l'espace $(u_1, \dots, u_{n+p})$ les équations (E) définissent une variété régulière du second ordre. Soient V′ et V″ deux variétés de cette classe. On pourra concevoir des transformations de G_2 opérant entre V′ et V″. A un mouvement sur V′ dont l'accélération est bien déterminée sur V′, va correspondre un mouvement analogue sur V″, la correspondance purement ponctuelle pouvant cette fois se prolonger par une autre correspondance biunivoque et continue, celle des éléments point-vitesse-accélération.

Si deux mobiles, à un certain instant, passent au même point de V′ avec la même vitesse, chacun d'eux ayant une accélération déterminée, la différence géométrique de leurs accélérations sera un vecteur de la variété linéaire L'_p portant le ptg. de V′ au point considéré. En outre, lors d'une transformation de G_2, opérant de V′ à V″, cette différence d'accélération subira la transformation linéaire tangente. Par cette différence géométrique, nous atteignons une propriété intrinsèque de la variété. On peut y rattacher la notion de suite ponctuelle tendant vers un point de V′ pour lequel elle admet une demi-tangente unique et un cercle de courbure unique: une telle suite sera réalisée lorsqu'il sera possible d'attacher à ses divers points des valeurs temporelles, la vitesse au point limite étant un vecteur bien déterminé porté par la demi-tangente, toute différence géométrique éventuelle entre deux déterminations de l'accélération étant colinéaire à la vitesse. Le théorème de Meusnier n'est rien de plus que ce résultat immédiat de la comparaison des accélérations pour diverses suites de V′ tendant vers un même point avec une même demi-tangente, quand on choisit les temps attachés aux points de chacune d'elles de manière à réaliser la même vitesse au point limite: les différences de ces accélérations prises deux à deux sont des vecteurs de la variété V′ au point considéré. Sous cette forme, le théorème de Meusnier préexiste à l'établissement d'une métrique de Riemann ou de Finsler sur la variété. Ou, si l'on préfère, le théorème de Meusnier tel qu'on le formule avec une de ces métriques est réductible à la forme que nous venons d'indiquer [33].

19. — Dans les considérations ci-dessus, l'espace cartésien intervient encore, au moins à titre d'échafaudage. Pour s'en passer, il faudrait prendre une variété topologique compacte $\mathcal{V}$, à chaque point de laquelle seraient attachés des vecteurs dont l'ensemble forme une variété vectorielle linéaire à un nombre constant de dimensions, ces vecteurs étant jusqu'à présent sans autre relation avec $\mathcal{V}$ que l'appartenance à $\mathcal{V}$ de l'origine de chacun d'eux. Il faudrait postuler que l'ensemble $\mathcal{W}$ des éléments (point-vecteur) est encore une multiplicité à voisinages, elle-même compacte. Une axiomatique convenable devrait introduire la notion d'un couple de points infiniment voisins d'un point fixe et tendant à déterminer une direction [34]

---

[33] Cf. E. Cartan, Les espaces de Finsler, fasc. 79 des *Actualités*, Hermann, p. 21.

[34] Le processus de détermination limite d'une telle direction peut se concrétiser en admettant que dans la variété, la lumière, au lieu de se propager entre deux points par un rayon rectiligne (comme il advient pour une variété affine) se diffuse, l'image d'une *source ponctuelle* perçue d'un autre point de la variété ayant un diamètre apparent non nul, mais qui tend vers zéro lorsque ce dernier point tend vers la source. L'un des postulats de l'axiomatique envisagée dans le texte énoncerait donc qu'un couple de points de la variété étant donné, on peut attacher à l'un de ces points un pinceau conique de directions (correspondant à des vecteurs de la variété en ce point), pinceau dont la section droite sphérique donnerait le contour de l'image diffuse de l'autre point. En échangeant les deux points et admettant le voisinage indéfini de chaque génératrice du premier pinceau avec chaque génératrice du second quand les points sont infiniment voisins, on aurait la notion d'une direction limite.

qui soit celle de l'un des vecteurs de ce point: ce serait le premier pas fait en vue de conférer à $\mathcal{V}$ une microstructure affine et d'apprendre à y définir, en chaque point d'accumulation, le ptg. d'un ensemble ponctuel, ou ce qui peut être plus commode, le ptg. mixte de deux ensembles ponctuels ayant un point d'accumulation commun[35]. Pour être utile, une telle théorie devrait aboutir à l'existence de systèmes réguliers de coordonnées curvilignes dans la variété, systèmes dont la représentation analytique rencontrée au n° 18 admet *a priori* l'existence.

Ces indications suggèrent l'importance de tout ce qui reste à faire en pareille matière. Et cependant avons-nous ici laissé de côté bien des questions essentielles, telles les relations de la théorie des surfaces avec la théorie de la mesure, relations dont l'importance apparaît de plus en plus nette[36].

SUR LES PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DES ENSEMBLES FERMÉS ET LE PRINCIPE INDUCTIF DE L'ENLACEMENT[1]

PAR

B. KAUFMANN (Leeds).

I. — PROPRIÉTÉS LOCALES D'ORIGINE INTÉGRALE.

1\. — Essayons de donner les caractéristiques de la topologie générale. Etant donné ce que cette science représente aujourd'hui on serait porté à considérer comme son problème principal l'examen par les méthodes de la topologie combinatoire des espaces les plus généraux et en particulier des ensembles fermés.

---

[35] On devrait respecter la condition d'après laquelle le ptg. mixte de E et de $F_1 + F^2$ est la réunion des ptg. mixtes de E, F_1 d'une part, et de E, F_2 d'autre part.

[36] Voir sur ce point la thèse de M. Georges DURAND (Paris, 1931, ou *Journ. de Math.*, 9me série, t. XI, 1931) et l'important mémoire déjà cité de MM. H. BUSEMANN et W. FELLER (*Acta Math.*, t. 66, paragraphes 4, 5, 6). — Pour l'élimination des espaces usuels, voir PAUC, *Bull. Ac. Sc. Belg.*, août 1936.

[1] Conférence faite le 23 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie.*