Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA COURBE DE L'HÔPITAL

Autor: Turrière, E.

Kapitel: 9. – L'IMAGE DE COURBURE DE MINKOWSKI.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28032

et, par suite, la condition précédente se met sous la forme:

$$\sin \alpha \, d\alpha = Ay^{-\lambda} dy \quad ;$$

d'où:

$$\frac{Ay^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \cos \alpha = \text{const} \quad ;$$

c'est-à-dire

$$y = B \cdot (\cos \alpha + h)^{\frac{1}{1-\lambda}} .$$

Pour $h = 0$, nous retrouvons les courbes de Ribaucour; pour $\lambda = \frac{3}{2}$, les courbes de pression constante. Les deux familles de courbes ont en commun les paraboles de directrice Ox. Jean BERNOULLI et le marquis DE L'HÔPITAL avaient signalé la propriété des trajectoires balistiques du point pesant de pouvoir être considérées comme des courbes particulières à pression constante.

9. — L'IMAGE DE COURBURE DE MINKOWSKI.

Une courbe plane (C) étant définie par sa tangente

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi$$

et son rayon de courbure ρ ayant l'expression

$$\rho = \varpi + \frac{d^2 \varpi}{d\varphi^2} ,$$

l'image de courbure [1] de Minkowski de cette courbe (« Das Minkowskische Krümmungsbild ») est, par définition, l'enveloppe de la droite

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \rho^{-\frac{1}{3}} .$$

---

[1] BÖLMER, Ueber elliptisch-konvexe Ovale. *Mathematische Annalen*, LX, p. 256-262 H. MOHRMANN, Ueber beständig hyperbolisch gekrümmte Kurvenstücke. *Math. Annalen*, LXXII, 1912, p. 593-595.

Le rayon de courbure de l'image de courbure est donc ρ_1

$$\rho_1 = \frac{1}{9}\rho^{-\frac{7}{3}}(9\rho^2 - 3\rho\rho'' + 4\rho'^2) ,$$

ρ' et ρ'' désignant les dérivées première et seconde de $\rho(\varphi)$.

L'image se réduit à un point lorsque la courbe (C) est une parabole ($\rho_1 = 0$).

Dans le cas de la courbe d'égale pression, l'image de courbure de Minkowski de cette courbe est l'enveloppe d'une droite d'équation

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi = k(a + \sin\varphi) ;$$

l'image est ainsi une *circonférence*. Cet exemple est de ceux qui illustrent le mieux la théorie des images de la courbure.

10. — Mouvements d'un point matériel, dans le plan, suivant la loi des aires sur l'hodographe.

L'étude de la courbe de pression constante dans le mouvement du point pesant pose la question des mouvements avec loi des aires sur l'hodographe.

La condition est:

$$v^2 \frac{d\alpha}{dt} = C = \text{constante} .$$

avec ses formes équivalentes:

$$v^3 = C \cdot \rho , \qquad \rho^2 \left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^3 = \text{const} ,$$

d'où la loi du temps correspondante:

$$nt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \rho^{\frac{2}{3}} d\alpha ;$$

n est une constante. Cette intégration est donc attachée simplement à l'équation naturelle de la courbe trajectoire du point matériel, et à sa radiale de Tücker.