Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA COURBE DE L'HÔPITAL

Autor: Turrière, E.

Kapitel: 8. — Relations avec les courbes de Ribaucour.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28032

le quadrilatère mixtiligne envisagé a pour aire l'expression suivante:

$$\Sigma = \frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho^2\, d\alpha \; ;$$

les limites α_1 et α_2 de l'intégrale correspondent aux inclinaisons sur la verticale des deux normales limitant l'aire Σ considérée.

Σ est donc *l'aire de la radiale* (ρ, α) de la courbe.

Dans le cas de la courbe de L'HÔPITAL, la radiale de TUCKER a pour équation polaire

$$\rho \cos^6 \frac{\alpha}{2} = 1 \; .$$

$$2\Sigma = \int \frac{d\alpha}{\cos^{12}\frac{\alpha}{2}} = 2\int_0^u (1 + u^2)^6 \cdot \frac{du}{1 + u^2} \, ,$$

$$\sum = \int_0^u (1 + u)^5 du \; ;$$

d'où l'expression entière en u de Σ, correspondant à celle trouvée par de L'HÔPITAL.

8. — RELATIONS AVEC LES COURBES DE RIBAUCOUR.

La courbe à pression constante satisfait à la condition

$$A\rho = |y|^{\frac{3}{2}} \, . \qquad (A = \text{const.})$$

De leur côté les *courbes de Ribaucour* satisfont à une relation plus générale

$$y^\lambda = A\rho \; .$$

En général

$$\frac{dy}{d\alpha} = \rho \sin \alpha \; ;$$

et, par suite, la condition précédente se met sous la forme:

$$\sin \alpha \, d\alpha = \mathrm{A} y^{-\lambda} dy \;;$$

d'où:

$$\frac{\mathrm{A} y^{1-\lambda}}{1-\lambda} + \cos \alpha = \text{const} \;;$$

c'est-à-dire

$$y = \mathrm{B} \cdot (\cos \alpha + h)^{\frac{1}{1-\lambda}} .$$

Pour $h = 0$, nous retrouvons les courbes de Ribaucour; pour $\lambda = \frac{3}{2}$, les courbes de pression constante. Les deux familles de courbes ont en commun les paraboles de directrice Ox. Jean BERNOULLI et le marquis DE L'HÔPITAL avaient signalé la propriété des trajectoires balistiques du point pesant de pouvoir être considérées comme des courbes particulières à pression constante.

9. — L'IMAGE DE COURBURE DE MINKOWSKI.

Une courbe plane (C) étant définie par sa tangente

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi$$

et son rayon de courbure ρ ayant l'expression

$$\rho = \varpi + \frac{d^2 \varpi}{d\varphi^2} ,$$

l'image de courbure [1] de Minkowski de cette courbe (« Das Minkowskische Krümmungsbild ») est, par définition, l'enveloppe de la droite

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \rho^{-\frac{1}{3}} .$$

---

[1] BÖLMER, Ueber elliptisch-konvexe Ovale. *Mathematische Annalen*, LX, p. 256-262
H. MOHRMANN, Ueber beständig hyperbolisch gekrümmte Kurvenstücke. *Math. Annalen*, LXXII, 1912, p. 593-595.