Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA COURBE DE L'HÔPITAL

Autor: Turrière, E.

Kapitel: 4. — Equations générales de la courbe Á PRESSION CONSTANTE.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28032

Et, par suite, la formule précédente conduit à mettre en évidence les courbes à pression constante par le théorème suivant:

Si, dans le mouvement sans frottement d'un point pesant sur une courbe plane, la pression est constante, le mouvement sur l'hodographe est effectué suivant la loi des aires et réciproquement.

Dans ce cas ($N = \text{const}$), la vitesse satisfait aux équations suivantes:

$$v^3 = C\rho .$$

$$v = \frac{C}{g} \cdot \frac{1}{N - \cos \alpha} ;$$

cette dernière relation exprime que, *dans le mouvement du point pesant sur la courbe de pression constante, l'hodographe est une conique de foyer* O.

L'excentricité de la conique est:

$$e = \frac{1}{N} = \frac{\text{poids du point matériel}}{\text{pression constante}} .$$

L'hodographe sera une hyperbole, une parabole ou une ellipse suivant que la pression sera inférieure, égale ou supérieure au poids du point matériel.

Si la pression constante est supérieure au poids du point matériel, l'hodographe du mouvement est une ellipse, parcourue suivant la loi du mouvement képlérien des planètes.

4. — Equations générales de la courbe à pression constante.

Si l'équation de la tangente courante est mise sous la forme $x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi$, les expressions des coordonnées du point courant d'une courbe semblable à la courbe de pression constante sont

$$x = -2\int \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{(a + \sin \varphi)^3}, \quad y = \frac{-1}{(a + \sin \varphi)^2} .$$

a n'est autre ici que le rapport N de la pression au poids ($a > 0$). L'expression du rayon de courbure ρ en fonction de φ est:

$$\rho = \frac{2}{(a + \sin\varphi)^3} = 2|y|^{3/2} .$$

La courbe ne présente aucune inflexion.

La loi du mouvement est:

$$t = \sqrt{2}\int \frac{d\varphi}{(a + \sin\varphi)^2} ,$$

l'hodographe étant une conique de foyer O, d'excentricité $\frac{1}{a}$, décrite suivant la loi du mouvement d'une planète.

On a en outre:

$$\frac{1}{2}x = a\int \frac{d\varphi}{(a + \sin\varphi)^3} - \int \frac{d\varphi}{(a + \sin\varphi)^2} ,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotg}\varphi , \qquad \frac{dx}{d\varphi} = -\rho\sin\varphi , \qquad \frac{dg}{d\varphi} = \rho\cos\varphi .$$

La courbe admet un axe vertical de symétrie (changer φ en $-\varphi$); elle n'a pas d'inflexion à distance finie.

L'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int \frac{dx}{(a + \sin x)^n}$$

satisfait à la relation de récurrence suivante:

$$(n+1)(1-a^2)\mathrm{I}_{n+2} + a(2n+1)\mathrm{I}_{n+1} - n\mathrm{I}_n = -\frac{\cos x}{(a + \sin x)^{n+2}} .$$

$$\mathrm{I}_0 = x.$$

$$(a^2 - 1)\mathrm{I}_2 = a\mathrm{I}_1 + \frac{\cos x}{a + \sin x}$$

$$2(a^2 - 1)\mathrm{I}_3 = 3a\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_1 + \frac{\cos x}{(a + \sin x)^2} .$$

d'où l'expression de l'abscisse x:

$$(a^2 - 1)^2 x = 3a\cdot\mathrm{I}_1 + \frac{\cos\varphi}{(a + \sin\varphi)^2}\left[a(2a^2 + 1) + (a^2 + 2)\sin\varphi\right] .$$

Quant à ϖ, distance de O à la tangente courante, cette fonction de φ a pour expression:

$$\varpi = -\cos\varphi \int \frac{1}{(a+\sin\varphi)^2} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} .$$

Ainsi que l'avaient indiqué Bernoulli et reconnu DE L'HÔPITAL, la courbe s'étudie soit au moyen des fonctions trigonométriques, soit au moyen de la fonction logarithmique. Deux formes distinctes en découlent pour la courbe, qui est soit un ovale, soit une courbe à branches paraboliques. La courbe algébrique de L'HÔPITAL est intermédiaire entre les deux types de courbes transcendantes.

5. — LA COURBE DE L'HÔPITAL.

Dans un précédent article [1] sur diverses courbes algébriques, j'ai mentionné cette intéressante courbe unicursale du cinquième degré, qui est une courbe de direction. Ses équations, à un facteur près de similitude, sont

$$x = 2\left(u - \frac{u^5}{5}\right), \qquad y = -(1+u^2)^2 < 0 ,$$

$$s = 2u + \frac{4}{3}u^3 + \frac{2}{5}u^5 .$$

$$\rho = (1+u^2)^3 , \qquad \rho = |y|^{\frac{3}{2}} .$$

Les équations respectives de la tangente et de la normale au point courant sont:

$$2u\mathrm{X} + (1-u^2)\mathrm{Y} = \frac{u^6}{5} + u^4 + 3u^2 - 1 ;$$

$$(1-u^2)\mathrm{X} - 2u\mathrm{Y} = 2u\left(\frac{1}{5}u^6 + \frac{4}{5}u^4 + u^2 + 2\right) .$$

La courbe a la forme d'un folium, sans asymptote. Elle admet un point double sur l'axe de symétrie Oy, $x = 0$,

[1] Notes sur des courbes spéciales algébriques. *Anais da Faculdade de Ciencias do Porto*, t. XX, 1936.