Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA COURBE DE L'HÔPITAL

Autor: Turrière, E.

Kapitel: 3. — Etude de la dérivée de la pression.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28032

3. — ÉTUDE DE LA DÉRIVÉE DE LA PRESSION.

Partant des formules

$$v^2 + 2gy = v_0^2 , \qquad \mathrm{N} = \cos\alpha + \frac{v^2}{g\rho} ,$$

nous obtenons par dérivations

$$v\frac{dv}{d\alpha} + g\rho\sin\alpha = 0 ,$$

$$\frac{d\mathrm{N}}{d\alpha} = -\sin\alpha + \frac{2v\,dv}{g\rho} - \frac{v^2}{g\rho^2}\frac{d\rho}{d\alpha} ,$$

$$\frac{d\mathrm{N}}{d\alpha} = \frac{3v}{g\rho}\frac{dv}{d\alpha} - \frac{v^2}{g\rho^2}\frac{d\rho}{d\alpha} ;$$

d'où finalement:

$$gv \cdot \frac{d\mathrm{N}}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{v^3}{\rho}\right) .$$

Mais

$$\rho = \frac{ds}{da} = v \cdot \frac{dt}{d\alpha} , \qquad \frac{v^3}{\rho} = v^2\frac{d\alpha}{dt}$$

et, par suite aussi:

$$gv \cdot \frac{d\mathrm{N}}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha}\left[v^2\frac{d\alpha}{dt}\right] .$$

v et α sont précisément les coordonnées polaires du point qui accompagne le point M et qui définit, par le lieu des positions successives qu'il occupe, l'*hodographe* du mouvement [1].

Dire que le mouvement sur l'hodographe de Hamilton est effectué suivant la loi des aires c'est interpréter la condition

$$v^2\frac{d\alpha}{dt} = \text{constante} .$$

[1] HAMILTON, le premier, appela l'attention sur l'intérêt présenté par l'hodographe. Il a mis en évidence la propriété des mouvements célestes d'être représentés par des hodographes circulaires.

Plus récemment, G. DARBOUX tira parti de l'hodographe pour écrire élégamment les équations relatives aux trois intégrales de Laplace.

Sur les trois intégrales de Laplace, *Bulletin astronomique*, 1886, t. V, p. 89.

Voir aussi: F. TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 121.

G. SCHOUTEN, *Niew Archief vor Wiskunde*, 1876, t. II, p. 76-96.

Et, par suite, la formule précédente conduit à mettre en évidence les courbes à pression constante par le théorème suivant:

Si, dans le mouvement sans frottement d'un point pesant sur une courbe plane, la pression est constante, le mouvement sur l'hodographe est effectué suivant la loi des aires et réciproquement.

Dans ce cas (N = const), la vitesse satisfait aux équations suivantes:

$$v^3 = C\rho \,.$$

$$v = \frac{C}{g} \cdot \frac{1}{N - \cos\alpha} \,;$$

cette dernière relation exprime que, *dans le mouvement du point pesant sur la courbe de pression constante, l'hodographe est une conique de foyer* O.

L'excentricité de la conique est:

$$e = \frac{1}{N} = \frac{\text{poids du point matériel}}{\text{pression constante}} \,.$$

L'hodographe sera une hyperbole, une parabole ou une ellipse suivant que la pression sera inférieure, égale ou supérieure au poids du point matériel.

Si la pression constante est supérieure au poids du point matériel, l'hodographe du mouvement est une ellipse, parcourue suivant la loi du mouvement képlérien des planètes.

4. — Equations générales de la courbe à pression constante.

Si l'équation de la tangente courante est mise sous la forme $x \cos\varphi + y \sin\varphi = \varpi$, les expressions des coordonnées du point courant d'une courbe semblable à la courbe de pression constante sont

$$x = -2\int \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{(a + \sin\varphi)^3} \,, \qquad y = \frac{-1}{(a + \sin\varphi)^2} \,.$$