Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA COURBE DE L'HÔPITAL

Autor: Turrière, E.

Kapitel: 2. — Etude de la pression dans le mouvement sans FROTTEMENT DU POINT PESANT SUR UNE COURBE PLANE SITUÉE DANS UN PLAN VERTICAL.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28032

Mais le problème ne fut résolu qu'en 1700, par le marquis de l'Hôpital, qui donna l'équation et quelques propriétés de la courbe dans le cas où elle est algébrique, c'est-à-dire lorsque la pression reste égale au poids du point matériel et qui se borna à indiquer que, dans le cas général, la courbe est transcendante; lorsque la pression est inférieure au poids, la transcendance est due à la présence de fonctions logarithmiques; lorsque la pression est supérieure au poids, les fonctions transcendantes introduites sont des fonctions circulaires.

L'Hôpital[1] donna, à la similitude près, l'équation suivante de la courbe à pression constante

$$5x = 2(y - \sqrt{y} - 1) \cdot \sqrt{2\sqrt{y} - 1} \; ;$$

l'axe Oy étant, dans sa figure, la verticale descendante. Il suffit de poser

$$y = \frac{(1 + \lambda^2)^2}{4} ,$$

dans cette équation, pour obtenir les expressions paramétriques de la quintique.

Cette courbe, qui a l'allure d'un folium à branches paraboliques, n'est autre que la courbe du *looping the loop*.

Enfin, M. L. Lecornu [2] a repris, en 1903, l'étude de la courbe à pression constante et il a montré que le mouvement sur l'hodographe était le mouvement képlérien des planètes.

2. — Etude de la pression dans le mouvement sans frottement du point pesant sur une courbe plane située dans un plan vertical.

L'axe Oy étant la verticale ascendante, l'intégrale des forces vives est tout d'abord

$$v^2 + 2gy = v_0^2 \; ;$$

v_0 est la vitesse au sommet (la vitesse minima).

[1] De l'Hôpital, Solution d'un problème physico-mathématique. *Mémoires de mathématique et de physique tirés des registres de l'Académie royale des Sciences* (Paris) de 1700, p. 9-21.
Histoire de l'Académie royale des Sciences, 1700, p. 78-87.
P. Jullien, *Exercices de Mécanique*, t. I, 1886, p. 406.
A. de Saint-Germain, *Recueil d'exercices de Mécanique rationnelle*, 1889, p. 285-289.
Gino Loria, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti*, t. II, 1936, p. 164.

[2] L. Lecornu, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 16 décembre 1903.
Cours de Mécanique, t. I, 1914, p. 337-341.

Soit α l'inclinaison sur l'horizontale Ox de la tangente à la courbe au point considéré; soit mgN la réaction normale. L'équation intrinsèque

$$\frac{mv^2}{\rho} = mg\mathrm{N} - m\,g\cos\alpha\ ,$$

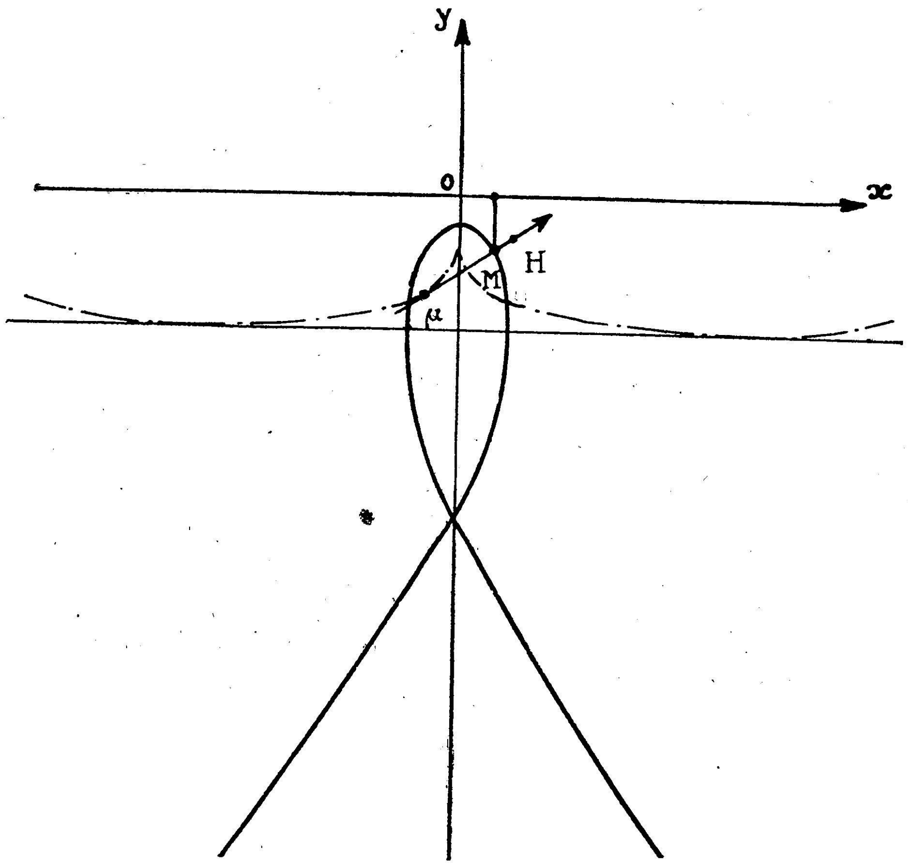
donne l'expression de N:

$$\mathrm{N} = \cos\alpha + \frac{v^2}{g\rho}\ ,$$

en fonction de la vitesse v, de l'angle α et du rayon de courbure ρ de la courbe.

Prenons pour axe Ox la droite qui permet de mettre l'intégrale des forces vives sous la forme réduite suivante:

$$v^2 + 2gy = 0\ ;$$



la vitesse serait théoriquement nulle aux points de rencontre de la courbe et de cet axe Ox, qui est donc une *directrice* de la courbe.

L'ordonnée y de tout point de l'arc utile de la courbe est nécessairement négative ($y \leq 0$). L'expression de la réaction prend ainsi la forme

$$N = \cos\alpha - \frac{2y}{\rho}\ .$$

(N est ici le rapport de la réaction au poids). Cette formule est explicitement donnée par L'HÔPITAL, qui la prend précisément pour départ de la solution du problème de BERNOULLI.

Nous ferons observer que cette formule générale pour la réaction normale s'écrit aussi sous la forme suivante

$$N = \frac{1}{\rho}(y_\mu - 3y)\ ,$$

en introduisant l'ordonnée y_μ du centre de courbure μ associé au point M:

$$y_\mu - y = \rho\cos\alpha\ .$$

Prenons encore, sur la normale en M, un point H situé de l'autre côté de M que le centre de courbure μ et tel que

$$\frac{\mathrm{MH}}{\mathrm{M}\mu} = -\frac{1}{2}\ .$$

Le point que j'ai nommé l'*orthocentre-limite* dans l'étude du triangle évanouissant formé par trois tangentes infiniment voisines d'une courbe[1] est précisément le point H ainsi défini.

Soit H_1 la projection orthogonale de l'orthocentre-limite H sur l'axe Ox des points où la vitesse serait nulle.

La formule générale de la pression (mgN) devient:

$$N = \frac{2}{\rho}\cdot \mathrm{HH}_1\ .$$

J'en ai indiqué une application immédiate au mouvement parabolique, dans le mémoire cité.

---

[1] E. TURRIÈRE, Sur un cas de dégénérescence de la géométrie du triangle. *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LXIII, 1935, p. 211-226 (paragraphe 6, p. 218).