

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: CONFERENCES INTERNATIONALES DE TOPOLOGIE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

CONFÉRENCES INTERNATIONALES DE TOPOLOGIE *

(suite et fin)

LE ROLE DE LA THÉORIE DES GROUPES EN GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE DIRECTE ¹

PAR

Georges BOULIGAND (Poitiers).

1. — Avec M. Karl MENGER, on peut lier aux fonctions réelles les recherches que j'ai faites ou conduites pour soumettre la Géométrie différentielle aux méthodes directes. En 1925, j'avais obtenu ce théorème, que j'énonce ici pour trois dimensions: « Une suite de fonctions harmoniques, bornées dans leur ensemble sur le domaine ouvert D , y converge vers une fonction harmonique s'il y a convergence en une infinité de points de D , ayant un point O de D pour point d'accumulation, pourvu que, dans un cône droit de sommet O , tout autre cône droit de sommet O , d'ouverture et de hauteur arbitrairement petites contienne des points de convergence » ².

Cette condition se distingue de celle d'une suite de fonctions holomorphes $f_n(z)$, assurée dans le domaine D du plan (z) dès qu'elle se produit en une infinité de points de D ayant le point O de D comme point d'accumulation ³. Il existe en ce dernier cas (contrairement au cas précédent) une condition purement topologique de convergence, ce qui sollicite déjà l'attention vers les champs d'invariance.

* Ces conférences ont eu lieu à l'Université de Genève, du 21 au 25 octobre 1935, sous la présidence de M. Elie CARTAN, Membre de l'Institut.

¹ Conférence faite le 25 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

² G. BOULIGAND, Fonctions harmoniques (*Mémorial Sc. Math.*, XI, p. 20).

³ Cf. P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales* (Gauthier-Villars, 1927, n° 16, p. 30). Le n° 121 de cet ouvrage énonce une condition de convergence pour une suite de fonctions holomorphes $f_n(z_1, z_2)$, indépendamment de mon résultat ci-dessus. Je suis revenu sur ce sujet au *Bull. Ac. Roy. des Sc. de Belgique*; t. XXI, séances des 2 février et 6 avril 1935.

2. — A un autre titre, les fonctions réelles intervinrent quand pour l'étude de propriétés locales (tangence, courbure généralisées), j'attachai dans l'espace euclidien, à tout point d'accumulation d'un ensemble ponctuel, certaines collections de demi-droites, droites, plans, cercles, ..., autant de *fonctions multiformes*⁴ au sens actuel très large de ce terme; M. C. KURATOWSKI en a défini la semi-continuité sous ses diverses espèces. Indépendamment, l'une des collections citées (le paratingent), par rapprochement avec les résultats de M^{lle} CHARPENTIER sur les intégrales de $y' = f(x, y)$ dans leur dépendance vis-à-vis du point dont elles partent, me fit rencontrer la *semi-continuité supérieure d'inclusion*⁵.

3. — Je définis maintenant les collections citées. Soit O un point d'accumulation de l'ensemble ponctuel E. Une demi-droite OT est dite *demi-tangente* en O à E, s'il existe une suite infinie $\{M_i\}$ de points de E telle que les distances OM_i et les angles $M_i\widehat{OT}$ tendent en même temps vers zéro. Une droite T'T passant par O est dite *paratingente* si elle est limite d'une suite infinie de droites T'_iT_i portant chacune une corde M_iN_i dont les extrémités appartiennent à E et tendent vers O. La collection des demi-tangentes est le *contingent* (ctg.), celle des paratingentes le *paratingent* (ptg.).

Tout plan passant par O et limite de plans contenant chacun trois points L_i, M_i, N_i, non alignés de E tendant vers O sera dit *biparatingent*. Sur la collection de ces plans, le *biptg.*, M. J. MIRGUET a montré l'intérêt de prélever ceux provenant de triplets dont les trois accouplements engendrent au moins deux ptg^{tes} distinctes. La collection ainsi filtrée est le *biptg. réduit*⁶.

Toute droite passant par O, limite de droites portant chacune trois points de E tendant vers O sera dite une ptg^{te} seconde.

⁴ G. BOULIGAND, C. R. Ac. Sc. Paris, 12 juin 1933 (t. 196, p. 1767 et ss.).

⁵ G. BOULIGAND, Sur l'idée d'ensemble d'accumulation (*Ens. math.*, t. 29, 1931, p. 246); Sur la semi-continuité d'inclusion (*Ens. math.*, t. 31, 1933, p. 14-22). Une bibliographie plus complète est donnée au fasc. LXXI du *Mémorial* (n° 6), p. 10-15 et note II, p. 53).

⁶ J. MIRGUET, Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales directes du premier ordre (Thèse, Paris, 1934 ou *Ann. Ec. Norm.*, 3, LI, 1934, p. 199-243).

D'où une nouvelle collection, le *ptg. second*. Ces notions sont valables en géométrie affine (espace cartésien).

Dans l'espace euclidien, on peut former des collections de figures plus variées (cercles, sphères, hélices circulaires, ...). Retenons ici le *ctg. circulaire* relatif au point O et à la demi-tangente OT : il comprend les cercles limites de cercles tangents en O à OT et portant un point de E tendant vers O ⁷; et le *ptg. circulaire* relatif au point O , formé des cercles limites de cercles passant par trois points de E tendant vers O .

4. — Apparentées dans leur essence aux plus grande et plus petite limites d'une suite et aux nombres dérivés d'une fonction, ces notions s'appliquent comme le point d'accumulation, à tout ensemble ponctuel⁸. Il est important d'en déterminer les champs d'invariance.

En effet, devant l'abondance des résultats mathématiques, une œuvre de coordination se poursuit, pour préciser les hypothèses et dégager le pourquoi des faits. Cette œuvre a fini par s'imposer, en Géométrie infinitésimale, après la découverte par M. LEBESGUE (1899) des surfaces qui sans contenir la moindre portion de droite sont isométriques au plan, et la découverte par JUEL de classes étendues de variétés jouissant de propriétés qu'on croyait réservées aux variétés algébriques⁹.

Pour les questions de causalité ainsi posées, l'idée de groupe donne un guide. Dans un champ défini de prémisses (l'espace euclidien, par exemple) soit P une proposition tirant d'un faisceau h d'hypothèses, non toutes essentielles, une conclusion c préalablement stipulée. Réduire h , ou encore, trouver les conditions les plus larges pour P vraie, c'est prendre toutes les modifications (des objets soumis à P) menant d'un cas d'exactitude

⁷ On pourra remplacer *circulaire* par *hémi-circulaire* lorsqu'il sera commode de se limiter à la demi-conférence qui, par rapport au plan normal en O , est du même côté que OT .

⁸ Les deux premières d'entre-elles (*ctg.* et *ptg.*) ont été considérées indépendamment par M. F. SEVERI en vue d'un prolongement de la Topologie (voir ses indications bibliographiques aux *Annali di Mat.*, 4, XIII, 1934-35, p. 1-35). La considération des *cordes impropres* remonte d'ailleurs à M. B. LEVI, dans le cas d'une courbe algébrique (*Acc. R. Sc.*, Torino, 1898). Mais tout l'intérêt se porte vers le recours constant à des notions de ce genre, à titre universel, pour la formation d'un système.

⁹ Voir l'exposé de M. Paul MONTEL (*Bull. Sc. Math.*, mars 1924, 2, XLVIII, p. 109-128).

à un autre. *Leur famille est un groupe*, étendant le champ d'exactitude et refoulant les hypothèses accessoires, groupe qu'on peut donc appeler: *domaine de causalité de P* (notion extensible à plusieurs propositions simultanées)¹⁰. On peut concevoir le fractionnement de l'activité géométrique vers des énoncés disjoints, en vue d'une extension du domaine de causalité de chacun d'eux, extension qui peut comporter une révision de prémisses, comme le suggèrent les énoncés euclidiens transposables sans spécification de la métrique aux variétés de Riemann ou de Finsler (exemple: constance de la longueur d'un arc minimum restant orthogonal aux déplacements de ses extrémités). Mais la méthodologie disjonctive ralentirait le travail. Il vaut mieux encadrer les résultats dans des groupes familiers, inclus dans le *groupe topologique général G* des transformations ponctuelles continues et biunivoques opérant entre portions d'espaces cartésiens (on se limite ici au point de vue local, ce qui dispense de distinguer G du groupe analogue extrait d'une variété de Riemann). C'est avec René Baire qu'on prit conscience du groupe G, en distinguant *les propriétés descriptives* de caractères (rectificabilité d'un arc, annulation de la mesure d'ordre n dans l'espace à n dimensions) altérables dans G.

5. — A ce tournant se présente le sous-groupe G_1 de G, qui en retient les transformations douées d'une transformation linéaire tangente, non dégénéréscente, continûment répartie. De ce groupe G_1 (*groupe de la topologie restreinte du premier ordre*) nous prendrons encore le modèle concret fourni par la représentation analytique dans l'espace cartésien.

Quant à G_1 , sont invariantes les propriétés suivantes, en un point d'accumulation de deux ensembles ponctuels: *a)* communauté du ctg.; *b)* communauté du ptg.; *c)* communauté du biptg. réduit¹¹. De ces propriétés, la première est invariante,

¹⁰ Voir le début de l'*Introd. à la Géom. inf. directe* (GID) et des *Premières leçons sur la Théorie des groupes* (Paris, Vuibert).

¹¹ Pour *a)*, *b)*, cf. GID, nos 69 et 74, et pour *c)*, ma communication de juillet 1935 à Liège « Sur quelques notions topologiques restreintes » (*Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, 4^{me} année, p. 219-223).

par le groupe, englobant G_1 , des transformations de G ayant au sens de Stolz une transformation linéaire tangente *non dégénérante*, continue ou non : soit le groupe G_1^{Stolz} ¹². Demander l'existence de la transformation linéaire tangente, au sens de Stolz revient à supposer les coordonnées (X, Y, Z) du point conséquent fonctions *différentiables au sens de Stolz*¹³ des coordonnées (x, y, z) du point antécédent; cette condition est plus restrictive que l'existence (sans intérêt, faute d'invariance) de dérivées partielles du premier ordre.

La propriété c) du biptg. réduit n'appartient pas au biptg. excluant les triplets alignés sans exclure les triplets *singuliers* (ceux où l'existence d'une direction limite pour un côté impose la même direction limite aux deux autres). Le biptg. ainsi défini est invariant, non plus par G_1 , mais seulement par les transformations localement bicontinues du groupe projectif. Ce même biptg. englobe toutes directions de plans, quand E est une surface $z = f(x, y)$ dont le ptg. en chaque point est l'ensemble des droites d'un plan: cette indétermination de la direction limite du plan d'un triplet permet la formation des polyèdres que SCHWARZ faisait tendre vers une portion ω de cylindre de révolution sans que les aires polyédrales avoisinent l'aire de ω . Par contre, pour une surface de la classe précédente, le biptg. réduit est-il formé de l'unique plan des ptg^{tes}¹⁴.

En un point d'accumulation commun à deux ensembles ponctuels, le rôle des triplets alignés dans la définition du ptg. second entraîne son caractère projectif: son application la plus importante est la définition locale d'une surface convexe, par la condition que le ptg. second est vide¹⁵.

6. — Ayant étudié l'invariance du ctg., du ptg., du biptg., du biptg. réduit, notions concernant le contact du premier ordre, examinons les notions relatives à des contacts du second ordre

¹² J'ai signalé ce groupe au début de mon mémoire « Sur la Topologie restreinte du second ordre » (*Bull. Soc. Math.*, t. LX, 1932, p. 228).

¹³ M. Maurice FRÉCHET a traité de cette importante notion aux *Nouvelles Annales* (1912, p. 385 et 433; 1919, p. 215).

¹⁴ A la fin du travail cité de J. MIRGUET, voir des conditions suffisantes pour la planéité du ptg., obtenues par l'entremise du biptg. réduit.

¹⁵ *G. I. D.*, ch. XIV et MIRGUET, C. R. 7 décembre 1936.

et dont le champ d'invariance dépasse le groupe projectif où se localise le ptg. second ¹⁶.

M. E. VESSIOT m'écrivait, fin 1930: « Ce que vous faites consiste à effectuer, avec S. Lie, des prolongements différentiels successifs d'ensembles considérés comme des multiplicités ponctuelles, en élargissant convenablement le sens du mot différentiel ». En fait, ce sont bien des prolongements du premier ordre de E qu'on obtient, du point de vue de Stolz, en prenant le ctg., du point de vue de la différentielle classique, en prenant le ptg. On peut assimiler ces prolongements à de nouveaux ensembles ponctuels d'un espace obtenu en adjoignant à un point de l'espace initial un vecteur issu de ce point, ce qui donne un élément qu'on peut appeler un *point-vitesse*. A chaque homéomorphie θ extraite de G_1 ou de G_1^{Stolz} dans l'espace initial S est attachée dans l'espace S' des points-vitesse une nouvelle homéomorphie θ' définie comme suit:

$$X = f(x, y, z), \quad Y = g(x, y, z), \quad Z = h(x, y, z). \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U = uf_x + vf_y + wf_z, \\ V = ug_x + vg_y + wg_z, \\ W = uh_x + vh_y + wh_z, \end{array} \right. \quad (2)$$

pour le cas où S est à trois dimensions ¹⁷. Pour que θ' appartienne au groupe G'_1 qui joue dans S' le même rôle que G_1 dans S, il faut et suffit que les différentielles de U, V, W existent et soient continues quant au point (x, y, z) , c'est-à-dire que f, g, h aient des dérivées secondes continues. Le jacobien de notre transformation à six dimensions, étant le carré de celui de θ , n'introduit pas de condition. A côté du groupe G_2 ainsi défini, on aperçoit le groupe G_2^{Stolz} , obtenu en soumettant les dérivées premières de f, g, h à la différentiabilité stolzienne.

La topologie restreinte du second ordre énonce des propriétés invariantes par G_2 ou G_2^{Stolz} , suivant les problèmes. Au mouvement d'un point dont la vitesse, bien déterminée à chaque

¹⁶ Citons aussi, dans le groupe projectif, le ctg. planaire (ou d'osculation), dont M. B. SEGRE vient de préciser la définition (*R. Acc. d'Italia*, vol. VI, p. 1209).

¹⁷ Dans G_1^{Stolz} , cela résulte du n° 8, p. 396-398, du mémoire cité de M. FRÉCHET.

instant, est continue, une transformation de G_1 fait correspondre un mouvement pour lequel sont garanties l'existence et la continuité de la vitesse; sa continuité disparaîtrait pour G_1^{Stolz} . Si la transformation provient de G_2 , l'existence et la continuité se conservent pour l'accélération comme pour la vitesse. Dans G_2^{Stolz} la continuité de l'accélération n'est plus invariante.

7. — Supposons que les équations (1) définissent une transformation $M = \mathfrak{C}(m)$ de G_2^{Stolz} . Les quantités f_x, f_y, f_z ont chacune une différentielle au sens de Stolz: le tableau des neuf coefficients différentiels de ces trois formes est alors symétrique par rapport à sa diagonale principale¹⁸. De plus, on peut écrire

$$\begin{aligned} & f(x + p, y + q, z + r) = \\ & = f(x, y, z) + pf_x + qf_y + rf_z + \varphi_2(p, q, r), \end{aligned} \quad (3)$$

φ_2 désignant un polynôme homogène quadratique dont les coefficients ont des limites quand p, q, r tendent vers zéro. Ces limites sont respectivement les dérivées secondes

$$f_{x^2} \quad f_{y^2} \quad f_{z^2} \quad f_{yz} \quad f_{zx} \quad f_{xy}$$

dont l'existence au point isolé x, y, z ne justifierait pas la relation (3).

Soit a un point d'accumulation de l'ensemble e dans l'espace (x, y, z) . Par $M = \mathfrak{C}(m)$, on passe de e à un ensemble E de l'espace (X, Y, Z) , avec $A = \mathfrak{C}(a)$ pour point d'accumulation. Appliquons (3) à f, g, h : les trois relations obtenues¹⁹ se condensent dans l'égalité géométrique

$$\overrightarrow{AM} = \mathfrak{C}(m) - \mathfrak{C}(a) = \mathcal{L}(\overrightarrow{am}) + \frac{1}{2} \left[\mathcal{Q}(\overrightarrow{am}) + \chi(\overrightarrow{am}) \right], \quad (4)$$

\mathcal{L} étant l'opérateur de la transformation linéaire tangente, et \mathcal{Q} un autre opérateur faisant passer de $\overrightarrow{am}(p, q, r)$ au vecteur dont la première composante serait

$$p^2 f_{x^2} + q^2 f_{y^2} + r^2 f_{z^2} + 2qr f_{yz} + 2rp f_{zx} + 2pq f_{xy}.$$

¹⁸ Voir aux *Nouv. Ann.* de 1912, dans le mémoire cité de M. FRÉCHET, le n° 15, p. 440-443.

¹⁹ La première de ces relations, par exemple, se déduit par intégration des trois relations obtenues en évaluant l'accroissement de f_x , celui de f_y et celui de f_z , compte tenu de ce que chacune de ces fonctions est différentiable au sens de Stolz.

Quant à χ , c'est un opérateur analogue, à coefficients non plus constants, mais infiniment petits avec \overrightarrow{am} .

Soit maintenant une suite $\{m_i\}$ de points de e tendant vers a . A chaque point de cette suite attachons une valeur ε_i du paramètre temporel τ . Supposons qu'il existe une suite évanescence $\{\varepsilon_i\}$ permettant d'écrire pour tout entier i

$$\overrightarrow{am}_i = \varepsilon_i \vec{v} + \frac{\varepsilon_i^2}{2} (\vec{j} + \vec{\omega}_i) \quad \text{avec} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \vec{\omega}_i = 0. \quad (5)$$

Ce cas est celui où la suite des positions m_i du mobile aux instants ε_i détermine univoquement au temps zéro une vitesse et une accélération, circonstance invariante dans G_2^{Stolz} ²⁰. Il est alors facile de voir que le contingent circulaire en a , pour la demi-tangente portant \vec{v} , de la suite $\{m_i\}$ est formé d'un cercle unique. Inversement, si le contingent circulaire pour la suite $\{m_i\}$, douée en a d'une seule demi-tangente, est formé d'un cercle unique, de rayon $\mathcal{R} \neq 0$, on peut attacher aux points m_i des instants ε_i assurant une vitesse et une accélération (uniques) au temps zéro. Car l'hypothèse équivaut à l'existence d'égalités géométriques

$$\overrightarrow{am}_i = |am_i| \vec{t} + \frac{|am_i|^2}{2\mathcal{R}} (\vec{n} + \vec{\omega}_i) \quad \text{avec} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \vec{\omega}_i = 0$$

en appelant \vec{t} le vecteur unitaire de la demi-tangente, \vec{n} celui de la demi-normale allant de a vers le centre; il suffit donc de prendre $\varepsilon_i = |am_i|$ pour avoir un mouvement de vitesse \vec{t} et d'accélération $\frac{\vec{n}}{\mathcal{R}}$ (c.q.f.d.).

8. — En cinématique du mouvement continu, on conçoit sur une trajectoire divers horaires. A un même instant, pour une position et une vitesse \vec{v} données du mobile, si \vec{j} est une détermination possible de l'accélération, les autres seront $\vec{j} + \lambda \vec{v}$, où λ est un scalaire.

²⁰ Introduite dans mon article « Sur la topologie restreinte du second ordre » (*Bull. Soc. Math.*, t. LX, 1932, p. 228-239), cette généralisation de notions cinématiques dans des conditions abandonnant la continuité du mouvement pour ne retenir que des suites de positions du mobile, heurte un peu les habitudes acquises. Elle est cependant conforme à l'esprit de notre étude.

Pareillement, dans le cas actuel, soit $\{m_i\}$ une suite de points donnant lieu aux relations (5). On aura indifféremment

$$\vec{am}_i = \varepsilon'_i \vec{v} + \frac{\varepsilon_i^2}{2} (\vec{j} + \vec{\omega}'_i), \quad (6)$$

où ε'_i est un infiniment petit équivalent à ε_i , puisqu'on a même vitesse en a . En outre, le plan (\vec{v}', \vec{j}') coïncide avec le plan (\vec{v}, \vec{j}) , qui a le rôle d'unique plan osculateur pour la suite. D'où

$$\vec{j}' = \vec{j} + \lambda \vec{v},$$

où λ est un scalaire. Un horaire donnant lieu à l'accélération \vec{j}' s'obtient en prenant

$$\varepsilon'_i = \varepsilon_i - \frac{\lambda \varepsilon_i^2}{2}.$$

De ces accélérations, une seule est orthogonale à \vec{v} . Prenons l'unité de temps de manière que ε_i soit équivalent à $|am_i|$; nous aurons $\vec{v}^2 = 1$; dans le plan (\vec{v}, \vec{j}) , soit \vec{n} le vecteur unitaire orthogonal à \vec{v} et faisant un angle aigu avec tout vecteur $\vec{j} + \lambda \vec{v}$, le cercle tangent en a au vecteur \vec{v} , contenu dans le plan (\vec{v}, \vec{j}) et ayant son centre c donné par $\vec{ac} = \mathcal{R} \vec{n}$ où \mathcal{R} est l'inverse du produit scalaire $\vec{n} \cdot \vec{j}$, sera l'unique cercle osculateur de notre suite.

Finalement pour toutes les suites de positions m_i ayant en a une même demi-tangente at et qu'on soumet à un horaire faisant correspondre au point a une vitesse \vec{v} bien déterminée portée par at , il y aura un seul et même cercle osculateur dans l'unique cas où toutes accélérations relatives à des suites partielles arbitrairement prélevées sur les suites données sont de la forme $\vec{j} + \lambda \vec{v}$, le coefficient λ étant seul indéterminé.

9. — Lorsqu'on effectue la transformation $M = \mathcal{C}(m)$ du groupe G_2^{Stolz} , à la vitesse \vec{v} correspond la vitesse $\vec{V} = \mathcal{L}(\vec{v})$, à l'accélération \vec{j} , pour la vitesse \vec{v} , correspond l'accélération $\vec{J} = \mathcal{L}(\vec{j}) + \mathcal{Q}(\vec{v})$, où \mathcal{Q} est l'opérateur homogène quadratique déjà rencontré dans la relation (4) du n° 7. Si donc au temps τ ,

deux mobiles occupant la même position et animés de la même vitesse, ont les accélérations \vec{j}_1 et \vec{j}_2 , leurs transformés auront des accélérations \vec{J}_1 et \vec{J}_2 telles que

$$\vec{J}_2 - \vec{J}_1 = \mathcal{L}(\vec{j}_2) - \mathcal{L}(\vec{j}_1) .$$

Dans les conditions indiquées, la différence géométrique des accélérations subit donc la transformation linéaire tangente.

10. — Ces diverses remarques montrent d'abord l'invariance par G_2^{Stolz} (a fortiori par G_2) de la communauté du contingent circulaire (restreint à des cercles de rayon non nul) pour deux ensembles ponctuels, relativement à un point d'accumulation et une demi-tangente qui leur sont communs. Il suffit d'observer que la suite des m_i donnant lieu aux relations (5) se transforme en la suite des M_i donnant lieu aux relations analogues

$$\vec{AM}_i = \varepsilon_i \vec{V} + \frac{\varepsilon_i^2}{2} (\vec{J} + \vec{\Omega}_i) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \vec{\Omega}_i = 0$$

avec

$$\vec{V} = \mathcal{L}(\vec{v}) \quad \vec{J} = \mathcal{L}(\vec{j}) + \mathcal{Q}(\vec{v})$$

On s'achemine vers le théorème de Meusnier en considérant un ensemble ponctuel e sur lequel le passage avec une vitesse donnée \vec{v} d'un mobile au point d'accumulation a , mobile qui reste sur l'ensemble, ne donne d'autres accélérations que celles représentées par des vecteurs d'origine a et d'extrémités situées dans un plan ω parallèle à \vec{v} . Alors, pour le correspondant E de e par la transformation $M = \mathcal{T}(m)$ de G_2^{Stolz} , nous aurons au point d'accumulation $A = \mathcal{T}(a)$, pour chaque mobile y passant avec la vitesse $\mathcal{L}(\vec{v})$, la propriété analogue avec un plan Π transformé de ω par la transformation linéaire tangente pour le couple (a, A) .

D'où un genre de propriété invariante, que nous allons interpréter. Lorsque dans le plan ω , l'extrémité de l'accélération \vec{j} reste sur une parallèle à \vec{v} , on a un cercle osculateur fixe. Et ce cercle se déplace sur une sphère σ , inverse du plan ω par rapport au point a (eu égard à la relation $\frac{1}{\mathcal{R}} = \vec{n} \cdot \vec{j}$ du n° 8), quand

l'extrémité de l'accélération varie *ad libitum* dans ω . La propriété invariante en question est donc encore le fait pour le contingent circulaire de se composer de cercles tangents en a du vecteur $\vec{\nu}$, sur la surface d'une même sphère σ .

Cette sphère σ sera dite *sphère de Meusnier* de l'ensemble e , pour a et la demi-tangente at portant $\vec{\nu}$. D'après cette définition, on peut énoncer la propriété d'invariance qui précède sous la forme suivante: un ensemble e pour lequel la sphère de Meusnier relative à $[a, \vec{\nu}]$ est unique se transforme dans le groupe G_2^{Stolz} en un ensemble E pour lequel la sphère de Meusnier relative à $[\mathcal{C}(a), \mathcal{L}(\vec{\nu})]$ est encore unique.

L'inverse du rayon de la sphère de Meusnier va continuer à s'appeler: *courbure normale*.

11. — J'ai donné en 1932 pour l'unicité de la sphère de Meusnier relative à (a, at) la condition suivante: il passe par a une perpendiculaire $z'z$ à at telle que le demi-plan $(z'z, at)$ ne contienne qu'une seule position limite, avec rayon non nul, pour un demi-cercle C_m ayant son diamètre ab porté par $z'z$ et passant par un point m de e qui tend vers a ²¹.

La condition précédente est invariante par G_2^{Stolz} , ce que M. Elie CARTAN a démontré comme suit: « Considérons un ensemble ponctuel rapporté à trois axes de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, O étant un point d'accumulation de l'ensemble, Ox une demi-tangente en O . La condition de M. Bouligand revient à supposer que, si pour différentes suites de points de l'ensemble tendant vers O , les trois quantités $y/x, z/x, z/(x^2+y^2+z^2)$ tendent les deux premières vers zéro et la troisième vers une quantité finie l , cette dernière limite est unique. Il revient évidemment au même de substituer à la quantité $z/(x^2+y^2+z^2)$ la quantité z/x^2 , et alors l'énoncé ne fait plus intervenir la propriété des axes d'être rectangulaires. — Cela posé, effectuons une transformation de la topologie restreinte du second ordre ²².

²¹ G. BOULIGAND, *Journ. de Math.*, 9, t. XI, 1932, p. 385-387. A cette forme de condition d'unicité, on rattache le théorème de Meusnier pour les courbes intégrales d'une équation de Monge (*C. R. des Séances de la Soc. Math.*, 1934, p. 32-34).

²² Ou plus précisément de G_2^{Stolz} , comme je le signalais au début de ce paragraphe.

Nous pouvons supposer que l'origine O est conservée, que la droite Ox est transformée en une ligne admettant OX pour tangente et que le plan $z = 0$ est transformé en une surface admettant $Z = 0$ pour plan tangent. Toute suite de points de l'ensemble pour laquelle y/x et z/x tendent vers zéro est transformée en une suite de points pour laquelle Y/X et Z/X tendent vers zéro. On a de plus

$$\frac{Z}{X} = \frac{hz + R(x, y, z)}{[ax + by + cz + P(x, y, z)]^2},$$

où h, a, b, c sont des constantes, P et R des polynômes homogènes du second degré dont les coefficients tendent vers des limites déterminées lorsque (x, y, z) tendent vers zéro. Si α est la limite du coefficient de x^2 dans R , on voit que y/x et z/x tendant vers zéro et z/x^2 tendant vers l , la quantité Z/X^2 tend vers la limite $(hl + \alpha)/\alpha^2$. Ou bien dans l'ensemble donné et son transformé satisfont simultanément à la condition de M. Bouligand, ou bien aucun d'eux n'y satisfait. »²³

12. — Tel que je l'ai formulé en 1932, le théorème de Meusnier est donc invariant dans G_2^{Stolz} . Il serait d'ailleurs superflu, avec certains auteurs, de supposer que le plan normal à z/z contient le paratingent de e en a ²⁴. On peut enrichir *ad libitum* le paratingent à l'origine d'un ensemble e admettant ce point pour point d'accumulation et situé tout entier entre les surfaces

$$2z = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad 2z = x^2 + y^2 + z^2$$

condition d'après laquelle pour une demi-tangente à l'origine, l'ensemble e a même sphère de Meusnier que chacune des surfaces précédentes. Cette remarque se généralise aisément.

13. — Si le contingent à l'origine de la surface $z = f(x, y)$, passant en ce point, comprend toute demi-droite du plan $z = 0$ et si la condition d'unicité de la sphère de Meusnier a lieu pour

²³ E. CARTAN, *C. R. Ac. Sc.*, t. XXI, séance du 21 oct. 1935.

²⁴ B. SEGRE, Il teorema di Meusnier nella geometria degli insiemi (*R. Acc. d'Italia*, vol. VI, 1935, p. 1205-1220, cf. n° 5 et 8); H. BUSEMANN et FELLER, Krümmungseigenschaften Konvexer Flächen (*Acta Math.*, t. 66; voir le second énoncé du § 2).

chacune de ces demi-tangentes avec un rayon non nul, on déduit d'un théorème de Janiszewski que la courbure normale est fonction continue de la demi-tangente correspondante. En même temps, l'on justifie pour $f(x, y)$ la forme suivante :

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \rho^2 [c(\omega) + \varepsilon] \quad (x = \rho \cos \omega, \quad y = \rho \sin \omega).$$

c étant continue et de période 2π ; quant à ε , c'est une fonction continue d'un point, infiniment petite avec la distance ρ de l'origine à ce point.

La courbe $\rho^2 c(\omega) = \pm 1$ est la limite d'une courbe obtenue en prenant la section de la surface $z = f(x, y)$ par le plan $2z = h$ et la soumettant à une homothétie de rapport $|h|^{-1/2}$ et de centre O . Cette courbe $\rho^2 c(\omega) = \pm 1$ s'obtiendrait encore en portant sur chaque demi-tangente issue de O , la racine carrée du rayon de la sphère de Meusnier correspondante. Pour que cette courbe se réduise à une conique, il suffit comme je l'ai montré en 1932²⁵ que sur une portion σ de la surface $z = f(x, y)$, dont le paratangent se réduit en chaque point à un plan, il corresponde à chaque élément semi-linéaire une courbure normale dépendant continuellement de cet élément linéaire, ou encore du point et de la demi-tangente correspondante pris en bloc.

La route suivie pour cette démonstration consiste à prouver que toute courbe de la portion σ de surface qui, sur l'un de ses plans tangents, se projette suivant un arc à courbure continue possède elle-même une courbure continue. On quitte ici le champ d'invariance de G_2^{Stolz} pour celui de G_2 .

La démonstration citée apporte d'ailleurs, pour les transformations particulières conservant les parallèles à l'axe des z et les longueurs sur ces droites, une réponse affirmative au second des deux problèmes suivants, que nous rapprochons à dessein :

PROBLÈME P_1 . — On considère le groupe G' des transformations $M = \mathcal{C}(m)$ qui de tout arc ayant une seule ptg^{te} en chaque

²⁵ G. BOULIGAND, *Journ. de Math.*, 9, t. XI, 1932, p. 137-141. L'indicatrice généralisée définie par MM. H. Busemann et W. Feller dans leur mémoire cité des *Acta Mathematica*, où les auteurs considèrent une surface convexe, est un cas particulier de la courbe $\rho^2 c(\omega) = \pm 1$ à laquelle conduit l'unicité de la sphère de Meusnier pour chacune des demi-tangentes issues d'un point de la surface.

point mènent à un arc ayant une seule ptg^{te} en chaque point, cela de telle manière qu'à un élément (point, ptg^{te}) du premier espace corresponde un élément (point, ptg^{te}) du second, suivant une loi biunivoque et continue. Le groupe G' , qui contient G_1 , se réduit-il à G_1 ?

PROBLÈME P_2 . — On considère le groupe G'' des transformations $M = \mathcal{T}(m)$ qui de tout arc à courbure continue mènent à un arc à courbure continue, cela de telle manière qu'à un élément (point, cercle osculateur) du premier espace corresponde un élément analogue du second, suivant une loi biunivoque et continue. Le groupe G'' , qui contient G_2 , se réduit-il à G_2 ?

14. — Il y a lieu de nous arrêter un peu sur les notions envisagées dans P_1 et P_2 . Lorsqu'on prend d'emblée le groupe G_1 , l'attention se porte sur le ptg. et les classes de courbes qu'il permet de distinguer: courbes dont les ptg^{tes} sont intérieures à un cône réel non dégénéréscant du second ordre; courbes dont le ptg. ne contient qu'une seule droite²⁶. Mais si, parti de G_1^{Stolz} , on revient à son sous-groupe G_1 , on envisagera d'abord le ctg. Un type de condition invariante dans G_1^{Stolz} est le fait pour le ctg. en un point de se trouver dans quelque demi-cône réel, non dégénéréscant du second ordre, ou ce qui revient au même, de rester dans un demi-cône strictement convexe, c'est-à-dire se laissant inclure aussi dans un demi-cône non dégénéréscant du second ordre, de même sommet. Pour un champ continu de tels demi-cônes γ_M , il y a identité entre les deux classes suivantes d'arcs simples:

- 1^o Ceux dont le ctg. postérieur est formé de demi-droites situées dans ou sur γ_M ;
- 2^o Ceux dont les ptg^{tes} portent une demi-droite située dans ou sur γ_M , cela a lieu pour chacune d'elles.

En particulier, ainsi que l'avait établi aux termes près, dès 1927, M. G. Valiron par un principe donnant sans restriction

²⁶ Un continu possédant une de ces propriétés est nécessairement une courbe, en vertu des lemmes d'univocité. Pour l'énoncé général de ces lemmes, cf. G. BOULIGAND, « Sur quelques applications de la théorie des ensembles à la géométrie infinitésimale » (*Bull. Ac. polon. des Sc. et des Lettres*, série A, 1930, p. 410-411).

la clef de l'identification précédente²⁷, un arc simple dont le ctg. postérieur est formé d'une seule demi-droite continûment répartie a aussi son ptg. réduit à une droite (cela, en chaque point).

Comme il était à prévoir, une restitution convenablement conduite de la continuité nous ramène donc d'éléments invariants dans G_1^{Stolz} à des éléments invariants dans G_1 .

15. — Pareillement, si l'on étudie dans G_2^{Stolz} un arc à ptg^{te} unique en chaque point, on prendra son ctg. circulaire. Supposons que le ctg. circulaire postérieur²⁸ se réduise à un seul cercle dont le rayon dépasse une longueur fixe, cela de manière qu'en prenant le point de contact M comme pôle d'inversion et une puissance constante, la droite transformée du cercle dans cette inversion soit continûment répartie en fonction du point M. Cela revient à dire que les trois coordonnées donnent lieu, pour chaque valeur particulière s_0 de l'abscisse curviligne et pour chaque valeur courante s la dépassant, à une relation de la forme

$$x(s) = x(s_0) + (s - s_0)x'(s_0) + \frac{(s - s_0)^2}{2} [\xi(s_0) + \varepsilon] ,$$

où ξ est continue en s_0 tout le long de l'arc, et où ε tend vers zéro pour chaque s_0 . La continuité de ξ exige alors que ε tende uniformément vers zéro le long de l'arc: sinon, il existerait une infinité de couples $(s_1, s_1 + h_1; s_2, s_2 + h_2)$, h_1 et h_2 étant positifs, et arbitrairement petits, aussi bien que $|s_2 - s_1|$, tels que la différence

$$\left| \frac{x(s_2 + h_2) - x(s_2) - h_2 x'(s_2)}{h_2^2} - \frac{x(s_1 + h_1) - x(s_1) - h_1 x'(s_1)}{h_1^2} \right|$$

²⁷ G. VALIRON, Sur les courbes à tangente continue qui admettent une tangente en chaque point (*Nouv. Ann.*, 4^{me} série, t. II, 1927, p. 48-50). Pour une étude plus systématique, voir A. MARCHAUD (*Journ. de Math.*, 9^{me} série, t. XII, 1933, pp. 415 et ss.). Voir aussi un mémoire de S. K. ZAREMBA, *Bull. des Sciences math.*, mai 1936.

²⁸ L'introduction d'un contingent circulaire unilatéral est naturelle lorsque ayant supposé l'unicité de la sphère de Meusnier pour chaque demi-tangente, on cherche à prouver ensuite le théorème d'Euler sur l'indicatrice des courbures, dans la voie suivie en 1932 au *Journ. de Math.* et reprise ici pour rattacher ce dernier théorème à la théorie des groupes.

demeure supérieure à un nombre positif fixe; cela donnerait au voisinage d'un point d'accumulation de tels couples, une inégalité incompatible avec la continuité de $\xi(s)$. Posons

$$X(s) = x(s) - x(0) - sx'(0) - \int_0^s (s-t)\xi(t) dt .$$

Pour h positif infiniment petit, la quantité

$$h^{-2} [X(s+h) - X(s) - hX'(s)]$$

tend uniformément vers zéro. En changeant $X(s)$ en $\pm X(s) + k^2 s^2$, on obtiendra la limite k^2 . Dans le plan (s, X) le diagramme de l'une des fonctions $\pm X(s) + k^2 s^2$ part de l'origine tangentiellement à l'axe des s , avec une concavité tournée vers les X positifs: donc chacune des fonctions $\pm X(s) + k^2 s^2$ sera positive, le long de notre arc, si petit que soit k^2 , ce qui ne peut avoir lieu que pour $X(s) \equiv 0$.²⁹ On en conclut que $\xi(s)$ est la dérivée seconde de x , à titre bilatéral.

Ces considérations sont importantes lorsqu'on veut montrer l'équivalence de diverses définitions pouvant convenir aux courbes à courbure continue, lesquelles jouent naturellement un rôle indispensable dans ma démonstration de 1932 du théorème d'Euler (existence d'une conique indicatrice), dont j'ai donné la référence au cours du n° 14. Le procédé d'unification le plus commode est celui qui ramène la continuité de la courbure à l'existence et à la continuité de la dérivée seconde droite de chaque coordonnée par rapport à l'arc (ce que nous venons de justifier).

Voici par exemple une propriété caractéristique des courbes à courbure continue³⁰, laquelle est d'ailleurs invariante dans G_2 : c'est la réduction à un cercle unique de rayon non nul du ptg. circulaire en chacun de leurs points.

Une autre propriété caractéristique des mêmes courbes se

²⁹ Ce principe de raisonnement est celui que Schwarz utilisait pour l'étude de la dérivée seconde généralisée introduite en théorie des séries trigonométriques. Cf. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. I, 3^{me} éd., p. 355-356.

³⁰ Les courbes à courbure continue sont des cas particuliers des courbes à courbure bornée qu'on peut caractériser de diverses manières. Voir C. CARATHÉODORY, *Kurven mit beschränkten Biegungen* (*Sitzungsberichte der preussischen Akademie*, 1933).

présente du fait qu'on peut définir le *ctg. circulaire, second mode*, en recourant à l'espace des points-vitesses et y ramenant la notion du *ctg. circulaire* de l'espace (x, y, z) à celle du *ctg. ordinaire* d'un ensemble de points (x, y, z, u, v, w) ³¹. Une suite génératrice d'un cercle unique du *ctg. circulaire second mode* donne aussi un cercle unique du *ctg. circulaire premier mode* sans que la réciproque ait lieu. Toutefois, pour une ligne à courbure continue où le *ctg. circulaire premier mode* se réduit à un cercle unique continûment réparti, on a la même propriété pour le *ctg. circulaire second mode*.

16. — Abordons maintenant P_1 . On peut voir que la correspondance biunivoque et continue reliant les éléments (point, *ptg^{te}*) lorsque le point m décrit un arc à *ptg^{te}* unique reste valable quand les dits éléments proviennent d'un ensemble ponctuel quelconque. Il suffit de montrer que chaque suite de couples ponctuels m_i, n_i tendant simultanément vers un point a , en donnant une *ptg^{te}* unique, conserve cette propriété; ce qu'on déduit de la considération des droites $m_i n_i$ et de leurs transformées; au voisinage ε_i du point $\mathcal{C}(a)$, toutes les *ptg^{tes}* à ces transformées prennent une même direction limite, vu la continuité de la correspondance des éléments (point, *ptg^{te}*). Soient m_i, n_i, m'_i, n'_i quatre points tendant vers a , de manière que $m_i n_i$ et $m'_i n'_i$ donnent une seule et même *ptg^{te}*, le même fait se produisant pour $m_i m'_i$ et $n_i n'_i$, la direction de la seconde *ptg^{te}* ainsi obtenue étant distincte de celle de la première. Supposons enfin que les couples $m_i n'_i$ donnent aussi une *ptg^{te}* unique et distincte de la précédente. Dans ces conditions, nous pourrions dire que le quadruplet $m_i n_i m'_i n'_i$ est un *micro-parallélogramme* non dégénéré. Si nous continuons à raisonner dans l'espace à trois dimensions, nous pourrions définir pareillement des *micro-parallélépipèdes* non dégénérés et qui tendent vers m , de manière que l'on ait pour leurs arêtes trois directions limites non coplanaires³². On pourra donc faire correspondre aux propriétés de géométrie affine des propriétés qui seront vérifiées à la limite pour des figures infiniment voisines du point a . Et

³¹ G. BOULIGAND, *Bull. Soc. Math.*, t. LX, 1932, p. 239-241.

³² G. BOULIGAND, *Bull. Soc. Roy. des Sc. de Liège*, 4^{me} année, p. 219-223.

d'après nos hypothèses, ces propriétés micro-affines seront conservées par la transformation \mathcal{T} . Cela montre déjà que la loi de correspondance entre une ptg^{te} issue de a et sa transformée issue de $\mathcal{T}(a)$ est celle qui relie les directions de deux droites liées par une transformation linéaire non dégénérante.

Cela posé, pour s'assurer que G' se réduit à G_1 , on va d'abord montrer qu'il n'existe qu'une seule valeur limite pour le rapport, au volume d'un domaine infiniment voisin du point a , du volume transformé [domaine infiniment voisin de $\mathcal{T}(a)$]. Puis on montrera que cette limite est une fonction continue de a .

La première de ces propriétés se démontre par l'absurde: l'existence de deux valeurs limites distinctes pour notre rapport de volumes entraînerait celle de couples de volumes infiniment petits équivalents dont les transformés ne seraient pas des infiniments petits équivalents, ce qui serait incompatible avec l'existence des propriétés micro-affines. Il n'y a donc qu'une seule valeur $j(a)$ du jacobien. Et cette valeur eût été régie, si sa pluralité eût été possible, par la semi-continuité supérieure d'inclusion: vu son unité, elle est donc continue (c.q.f.d.).

La transformation linéaire tangente existe et est continue. D'où $G' \equiv G_1$.

17. — Le problème P_1 est donc résolu par l'affirmative. D'après les remarques du n° 14, ce problème ne serait pas altéré si au lieu d'envisager la conservation des arcs à ptg^{te} unique, on envisageait celle des arcs à demi-tangente postérieure unique et continue de manière qu'un élément (point, demi-tangente) se change en un autre élément de la même classe suivant une loi biunivoque et continue. L'invariance demandée n'a lieu que dans le groupe G_1 . Même résultat si l'on envisageait la conservation des mouvements qui s'accomplissent avec une vitesse déterminée et non nulle, de manière qu'il y ait correspondance biunivoque et continue des points-vitesses.

Occupons-nous maintenant des transformations du groupe G_1 qui satisfont aux conditions du problème P_2 . Nous pourrions encore énoncer ce dernier sous diverses formes équivalentes. Par exemple, on peut regarder un arc doué d'une ptg^{te} unique, dans l'espace (x, y, z) , servant de trajectoire à un point ayant à

chaque instant une vitesse déterminée, non nulle, avec une accélération tangentielle continue. Après construction d'un hodographe, nous aurons la trajectoire d'un nouveau mouvement dans l'espace (x, y, z, u, v, w) , lequel est représenté dans l'espace (x, y, z, u, v, w, t) par un arc rencontrant en un seul point chaque variété $t = \text{const.}$ Résoudre le problème P_2 , c'est trouver parmi les transformations considérées de l'espace (x, y, z) celles qui se laissent prolonger dans l'espace (x, y, z, u, v, w, t) suivant le mode indiqué de manière qu'un arc de ce dernier espace, doué d'une demi-tangente unique et continue, et soumis aux conditions $\frac{dx}{dt} = u(t)$, $\frac{dy}{dt} = v(t)$, $\frac{dz}{dt} = w(t)$, donne par la transformation prolongée, un arc jouissant de la même propriété, la correspondance entre les éléments (point, demi-tangente) étant toujours biunivoque et continue.

Puisque nous sommes dans G_1 , nous avons entre les composantes de la vitesse dans le mouvement antécédent et dans le mouvement conséquent les relations

$$U = uf_x + vf_y + wf_z,$$

$$V = ug_x + vg_y + wg_z,$$

$$W = uh_x + vh_y + wh_z.$$

Si u, v, w admettent des dérivées premières continues par rapport à t , la même propriété doit appartenir à U, V, W . Cela aura lieu notamment quand chacune des quantités u, v, w restera constante. Donc, la quantité

$$uf_x + vf_y + wf_z$$

devra posséder une dérivée par rapport à t quels que soient les coefficients constants u, v, w . Nous aurons donc à exprimer cette propriété pour chacune des dérivées partielles du premier ordre de f, g, h , quand le point x, y, z décrit une trajectoire suivant une loi impliquant l'existence d'une vitesse continue. De la solution du problème P_1 appliquée à la transformation

$$X = x, \quad Y = y, \quad Z = z, \quad U = u + \varphi(x, y, z),$$

où φ représente l'une des dérivées partielles f_x, \dots, h_z , on conclut à l'existence et à la continuité des dérivées secondes de f, g, h , ce qui résout par l'affirmative le problème P_2 .

Le théorème d'Euler sur l'indicatrice des courbures est donc un cas particulier d'un énoncé $G_2 = G''$ extrait de la Théorie des groupes.

18. — Terminons par des remarques concernant la réalisation des groupes que nous avons introduits. Pour obtenir une représentation concrète de G_1 , nous nous sommes limités à des transformations ponctuelles opérant dans un espace cartésien. Par l'intermédiaire de ces transformations, on peut atteindre les correspondances entre deux variétés à un même nombre p de dimensions, baignant dans un espace cartésien E_{n+p} à $n+p$ dimensions $(u_1, u_2, \dots, u_{n+p})$, pour ne retenir que les propriétés de ces correspondances pouvant se lier d'une manière intrinsèque aux variétés considérées. Nous prendrons exclusivement des variétés admettant une représentation paramétrique

$$u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_p) \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots, n+p, \quad (E)$$

où les seconds membres ont des dérivées premières continues par rapport à l'ensemble des variables, cela de telle manière que le tableau des $\partial u_i / \partial x_j$ contienne au moins un déterminant d'ordre p non nul. D'après le théorème des fonctions implicites, on peut alors définir le voisinage d'un point sur la variété par n équations exprimant, sur l'ensemble des coordonnées u_1, \dots, u_{n+p} de l'espace ambiant, n d'entre elles par des fonctions continûment dérivables du premier ordre des p autres. Au point de vue intrinsèque dans E_{n+p} , ces variétés sont encore celles dont le ptg. en chaque point contient toutes directions d'une variété linéaire L_p d'ordre p . Nous dirons en abrégé que ces variétés sont régulières du premier ordre. Sur ces variétés-mêmes, on pourra donner un sens aux notions de micro-équipollence, de micro-parallélogramme, ..., notions qu'on peut rassembler sous la dénomination de *micro-affines*. Toutes sont solidaires des suites de couples ponctuels m_i, n_i donnant naissance à une ptg^{te} unique. On pourra donc concevoir les transformations de

G_1 comme opérant entre deux variétés à un même nombre de dimensions V' et V'' de la classe précédente et en conservant les propriétés micro-affines. Au mouvement d'un point admettant sur V' à chaque instant une vitesse déterminée, continue et non nulle, va correspondre sur V'' un mouvement doué des mêmes caractères. De cette correspondance purement ponctuelle, nous pourrons encore passer à la correspondance entre les points-vitesses, linéaire relativement aux vitesses affectant une même position. Nous aurons

$$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial u_i}{\partial x_p} \frac{dx_p}{dt} \quad (E')$$

En considérant les quantités

$$y_k = \frac{dx_k}{dt}$$

comme de nouvelles variables, il pourra se faire que les $2n$ équations (E, E') définissent dans l'espace à $2(n+p)$ dimensions une variété régulière du premier ordre. Nous dirons alors que dans l'espace (u_1, \dots, u_{n+p}) les équations (E) définissent une variété régulière du second ordre. Soient V' et V'' deux variétés de cette classe. On pourra concevoir des transformations de G_2 opérant entre V' et V'' . A un mouvement sur V' dont l'accélération est bien déterminée sur V' , va correspondre un mouvement analogue sur V'' , la correspondance purement ponctuelle pouvant cette fois se prolonger par une autre correspondance biunivoque et continue, celle des éléments point-vitesse-accélération.

Si deux mobiles, à un certain instant, passent au même point de V' avec la même vitesse, chacun d'eux ayant une accélération déterminée, la différence géométrique de leurs accélérations sera un vecteur de la variété linéaire L'_p portant le ptg. de V' au point considéré. En outre, lors d'une transformation de G_2 , opérant de V' à V'' , cette différence d'accélération subira la transformation linéaire tangente. Par cette différence géométrique, nous atteignons une propriété intrinsèque de la variété. On peut y rattacher la notion de suite ponctuelle tendant vers un point de V' pour lequel elle admet une demi-tangente unique et un cercle de courbure unique: une telle suite sera réalisée

lorsqu'il sera possible d'attacher à ses divers points des valeurs temporelles, la vitesse au point limite étant un vecteur bien déterminé porté par la demi-tangente, toute différence géométrique éventuelle entre deux déterminations de l'accélération étant colinéaire à la vitesse. Le théorème de Meusnier n'est rien de plus que ce résultat immédiat de la comparaison des accélérations pour diverses suites de V' tendant vers un même point avec une même demi-tangente, quand on choisit les temps attachés aux points de chacune d'elles de manière à réaliser la même vitesse au point limite: les différences de ces accélérations prises deux à deux sont des vecteurs de la variété V' au point considéré. Sous cette forme, le théorème de Meusnier préexiste à l'établissement d'une métrique de Riemann ou de Finsler sur la variété. Ou, si l'on préfère, le théorème de Meusnier tel qu'on le formule avec une de ces métriques est réductible à la forme que nous venons d'indiquer ³³.

19. — Dans les considérations ci-dessus, l'espace cartésien intervient encore, au moins à titre d'échafaudage. Pour s'en passer, il faudrait prendre une variété topologique compacte \mathcal{V} , à chaque point de laquelle seraient attachés des vecteurs dont l'ensemble forme une variété vectorielle linéaire à un nombre constant de dimensions, ces vecteurs étant jusqu'à présent sans autre relation avec \mathcal{V} que l'appartenance à \mathcal{V} de l'origine de chacun d'eux. Il faudrait postuler que l'ensemble \mathcal{W} des éléments (point-vecteur) est encore une multiplicité à voisinages, elle-même compacte. Une axiomatique convenable devrait introduire la notion d'un couple de points infiniment voisins d'un point fixe et tendant à déterminer une direction ³⁴

³³ Cf. E. CARTAN, Les espaces de Finsler, fasc. 79 des *Actualités*, Hermann, p. 21.

³⁴ Le processus de détermination limite d'une telle direction peut se concrétiser en admettant que dans la variété, la lumière, au lieu de se propager entre deux points par un rayon rectiligne (comme il advient pour une variété affine) se diffuse, l'image d'une source ponctuelle perçue d'un autre point de la variété ayant un diamètre apparent non nul, mais qui tend vers zéro lorsque ce dernier point tend vers la source. L'un des postulats de l'axiomatique envisagée dans le texte énoncerait donc qu'un couple de points de la variété étant donné, on peut attacher à l'un de ces points un pinceau conique de directions (correspondant à des vecteurs de la variété en ce point), pinceau dont la section droite sphérique donnerait le contour de l'image diffuse de l'autre point. En échangeant les deux points et admettant le voisinage indéfini de chaque génératrice du premier pinceau avec chaque génératrice du second quand les points sont infiniment voisins, on aurait la notion d'une direction limite.

qui soit celle de l'un des vecteurs de ce point: ce serait le premier pas fait en vue de conférer à \mathcal{V} une microstructure affine et d'apprendre à y définir, en chaque point d'accumulation, le ptg. d'un ensemble ponctuel, ou ce qui peut être plus commode, le ptg. mixte de deux ensembles ponctuels ayant un point d'accumulation commun³⁵. Pour être utile, une telle théorie devrait aboutir à l'existence de systèmes réguliers de coordonnées curvilignes dans la variété, systèmes dont la représentation analytique rencontrée au n° 18 admet *a priori* l'existence.

Ces indications suggèrent l'importance de tout ce qui reste à faire en pareille matière. Et cependant avons-nous ici laissé de côté bien des questions essentielles, telles les relations de la théorie des surfaces avec la théorie de la mesure, relations dont l'importance apparaît de plus en plus nette³⁶.

SUR LES PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DES ENSEMBLES FERMÉS ET LE PRINCIPE INDUCTIF DE L'ENLACEMENT¹

PAR

B. KAUFMANN (Leeds).

I. — PROPRIÉTÉS LOCALES D'ORIGINE INTÉGRALE.

1. — Essayons de donner les caractéristiques de la topologie générale. Etant donné ce que cette science représente aujourd'hui on serait porté à considérer comme son problème principal l'examen par les méthodes de la topologie combinatoire des espaces les plus généraux et en particulier des ensembles fermés.

³⁵ On devrait respecter la condition d'après laquelle le ptg. mixte de E et de $F_1 + F_2$ est la réunion des ptg. mixtes de E, F_1 d'une part, et de E, F_2 d'autre part.

³⁶ Voir sur ce point la thèse de M. Georges DURAND (Paris, 1931, ou *Journ. de Math.*, 9^{me} série, t. XI, 1931) et l'important mémoire déjà cité de MM. H. BUSEMANN et W. FELLER (*Acta Math.*, t. 66, paragraphes 4, 5, 6). — Pour l'élimination des espaces usuels, voir PAUC, *Bull. Ac. Sc. Belg.*, août 1936.

¹ Conférence faite le 23 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

En effet, ces dernières années la topologie générale s'est très sensiblement rapprochée de la topologie combinatoire. Cependant, une différence importante subsiste entre ces deux disciplines très liées et c'est une différence de principe. On peut facilement la réduire à un seul fait.

La topologie combinatoire construit ses objets d'après certaines règles d'incidence à partir d'un nombre fini ou dénombrable d'éléments que l'on appelle des simplexes ou des cellules. Pour la plupart des problèmes il est indifférent si ces éléments sont géométriquement définis ou conçus d'une manière abstraite comme des schémas combinatoires. En tous cas cette construction fournit d'une manière univoque : les relations d'incidence ou de frontière, les possibilités de subdivisions successives ou de triangulations des configurations en d'autres équivalentes (ou homologues), etc.

La situation dans la topologie générale est tout à fait différente. Les ensembles fermés ne sont d'abord que des assemblages amorphes et essentiellement continus de points; il n'y a point d'éléments du genre des simplexes à l'exception de ceux à 0 dimensions, à savoir des points. Par conséquent il n'existe pas de subdivisions simples, de relations d'incidence, etc. Les subdivisions usuelles fournissent des éléments qui eux-mêmes n'ont pas de forme non plus, moins encore que l'ensemble lui-même. Cette différence fondamentale quoique évidente est décisive pour la mise en problèmes de la topologie générale, elle explique même son développement actuel.

Il est bien connu que la possibilité d'une application des méthodes combinatoires subsiste malgré cela. Elle se base sur l'idée d'approximations. On part des subdivisions suffisamment fines d'un ensemble F , subdivisions qui découlent des théorèmes de recouvrement, ou encore d'un réseau fini (ou dénombrable) de points (simplexes 0-dimensionnels) distribués régulièrement sur F ; une seule règle, à savoir celle qui affirme que $r + 1$ éléments ayant un point commun ¹ déterminent un simplexe à r dimensions, permet de construire les complexes d'approxima-

¹ Dans le cas d'un réseau ponctuel c'est un réseau partiel formé de $r + 1$ points et dont l'enveloppe convexe a un diamètre donné, qui détermine un simplexe r -dimensionnel.

tion (les nerfs). Les subdivisions successives de l'ensemble F donnent une suite de complexes d'approximation. Alors, une approximation suffisamment poussée permet de déceler la parenté entre les complexes et l'ensemble lui-même. Le succès de ces méthodes est bien connu. Elles ont permis de définir pour les ensembles fermés les relations d'homologie, les ordres de connexion et les nombres de Betti pour un nombre arbitraire de dimensions, de généraliser les relations d'intersection et d'enlacement, d'établir et de démontrer les théorèmes correspondants de dualité et, enfin, d'obtenir plusieurs propriétés nouvelles des ensembles les plus généraux.

2. — J'ai voulu rappeler le développement de la topologie des ensembles fermés pour souligner quelques-uns de ses caractères auxquels on ne pense pas souvent.

L'un de ces caractères est *l'existence de nombreux problèmes qui ne peuvent pas se présenter en topologie combinatoire* et qui dans le cadre de cette dernière deviennent des énoncés évidents et triviaux *bien qu'ils découlent en topologie des ensembles de théorèmes combinatoires de toute importance.*

Ces problèmes spécifiques à la topologie générale peuvent être très intéressants et très profonds sans avoir de pendant dans la topologie cellulaire. Le problème de la dimension en est un exemple. Représentons-nous, par exemple, les énoncés suivants pour le complexe r -dimensionnel K^r : K^r contient un cycle $(r - 1)$ -dimensionnel homologue à 0, K^r est un « obstacle d'homologie » à r dimensions, K^r contient une multiplicité de Cantor à r dimensions, etc. A tous ces énoncés qui sont bien triviaux dans le cadre de la topologie cellulaire correspondent des résultats importants et intéressants dans la topologie générale. Songeons seulement que ces résultats découlent des théorèmes de dualité ou peuvent être ramenés à eux.

Une autre propriété remarquable de la topologie générale se rapporte à son développement et se manifeste par la *prépondérance de résultats globaux*. Les complexes d'approximation permettent d'appliquer les invariants combinatoires à l'ensemble et puisque ces invariants sont des propriétés globales pour les complexes, ils le sont à plus forte raison pour les ensembles.

La parenté mentionnée ci-dessus entre les ensembles et les complexes d'approximation est une parenté globale. Même les transformations d'un ensemble F à r dimensions en un complexe K^r à r dimensions — d'après le théorème de transition de M. ALEXANDROFF — transformations qui sont certainement des processus localement définis, expriment uniquement une parenté globale. *Généralement l'approximation ne confère pas les propriétés locales des complexes à l'ensemble.*

3. — Pour cette raison il semble désirable de distinguer nettement entre elles les propriétés locales d'un ensemble F donné dans un espace R . P étant un point de F il est d'usage d'appeler *local* un énoncé ou une propriété E de F se rapportant à un voisinage U de P dans l'espace R . Si le même énoncé E se rapporte à un voisinage arbitrairement petit du point P , on pourrait l'appeler une propriété *infinitésimale* de F . Mais d'avoir formé ces notions ne permet pas encore d'obtenir les caractères distinctifs des propriétés locales d'un ensemble. Je crois cependant qu'il existe deux types essentiellement différents de ces propriétés.

Nous voulons ici nous restreindre aux énoncés qui sont des théorèmes, c'est-à-dire à des énoncés qui se démontrent.

Soit (B) un système d'hypothèses dont, par une démonstration, découle un énoncé ou une propriété E ; désignons la démonstration par $(B) \rightarrow E(F)$.

U étant un voisinage dans R d'un point P de F , nous appellerons¹ $E(U)$ une propriété locale ordinaire de F si sa démonstration $(B) \rightarrow E(F)$ ne contient pas non plus d'hypothèses essentielles dans $R - \bar{U}$. Si un même énoncé $E(U_n)$ reste vrai pour une suite (U_n) de voisinages convergeant en un point P de F et si la démonstration $(B) \rightarrow E(U_n)$ reste pour chaque n intérieure à U_n , alors nous parlerons d'une propriété infinitésimale ordinaire de F relatif à P .

Dans les cas suivants cependant on se trouve en présence de faits tout à fait différents.

¹ Si un énoncé ou une propriété E se rapporte à un ensemble F nous écrivons aussi brièvement $E(F)$. Si U est un voisinage dans l'espace R , $E(U)$ désigne que l'énoncé $E(F)$ contient au moins un énoncé essentiel pour U .

Si la démonstration $(B) \rightarrow E(U)$ nécessite des hypothèses essentielles dans $R - \bar{U}$ et en particulier si elle doit se servir essentiellement d'endroits intérieurs à $R - \bar{U}$, alors nous appellerons $E(U)$ une propriété locale (de F) d'origine intégrale. Et, d'une façon analogue, si $E(U_n)$ est un énoncé vrai pour un voisinage arbitrairement petit U_n de P et s'il existe un voisinage fixe U_δ tel que $(B) \rightarrow E(U_n)$ reste vrai pour chaque n , des hypothèses essentielles étant données dans $R - U_\delta$, alors nous appelons E une propriété infinitésimale (de F) d'origine intégrale.

Les propriétés locales (ou infinitésimales) d'origine intégrale peuvent notamment s'exprimer (totalement ou en partie) par les énoncés dans $R - \bar{U}$, malgré qu'elles se rapportent immédiatement¹ à U . Si c'est le cas, alors nous parlons d'énoncés locaux (ou infinitésimaux) de caractère intégral. Evidemment, ces énoncés peuvent être en même temps envisagés comme des énoncés globaux. L'on constate aisément qu'un énoncé de caractère intégral doit être nécessairement d'origine intégrale (mais pas réciproquement).

Les propriétés locales et notamment les propriétés infinitésimales d'origine intégrale sont caractéristiques pour la topologie des ensembles fermés. Mais on voit immédiatement qu'il s'agit seulement d'une formation relative des notions. La distinction entre les propriétés ordinaires ou d'origine intégrale dépend non seulement d'un certain système (B) d'hypothèses, mais aussi des démonstrations elles-mêmes². Je crois cependant qu'il est un principe de travail utile et de grande actualité de former ces notions malgré qu'elles ne requièrent pas, au moins sous cette forme, de rigueur mathématique ou même philosophique.

4. — Je voudrais encore compléter ces considérations sur les propriétés locales et infinitésimales des ensembles fermés en soulignant les deux (ou trois) attitudes qu'on peut prendre

¹ La définition de propriété locale n'exclue point que l'énoncé $E(U)$ contienne en même temps des énoncés dans $R - \bar{U}$. Cela n'est exclu que pour le cas des propriétés locales ordinaires. Considérons par exemple l'énoncé suivant: « (B) entraîne que tous les couples de points dans U peuvent être reliés par un arc dans F tel qu'il rencontre des points dans $R - \bar{U}$ ».

² Seuls les énoncés de caractère intégral sont indépendants des démonstrations.

vis-à-vis d'elles, attitudes entraînées par les problèmes eux-mêmes.

L'une de ces attitudes est déterminée par le désir de caractériser entre les ensembles et les espaces les plus généraux ceux qui présentent les propriétés déjà connues des formations cellulaires (des multiplicités, des espaces de Poincaré, des sphères). Ces problèmes sont aussi très importants pour la topologie combinatoire puisqu'ils permettent d'étendre son domaine de validité. La résolution de ces problèmes s'obtient en posant des conditions nécessaires et suffisantes de genre généralement local, qui garantissent la possibilité de la structure cellulaire. On a une très grande liberté dans le choix de ces conditions et l'intuition est d'un grand secours. *A priori* au moins, ces conditions peuvent aller des tautologiques jusqu'aux très profondes. Le principe directeur est évidemment le suivant, si l'on envisage un but concret: *moins on pose d'hypothèses, plus la portée des conditions s'étend*. Comme exemple citons le problème de la généralisation de la notion de multiplicité, dont on s'est beaucoup occupé ces dernières années (VAN KAMPEN, PONTRJAGIN, ALEXANDER, LEFSCHETZ) ou encore le problème de caractériser la sphère à n dimensions. On peut aujourd'hui poser des conditions nécessaires et suffisantes pour l'homéomorphie d'un espace et d'une sphère, mais on pourrait aussi en poser assez peu pour rendre le problème extrêmement difficile, comme c'est le cas avec l'hypothèse de POINCARÉ. Comme problème très relié à ce dernier, mais plus profond encore, citons le problème de la réciproque du théorème Jordan-Brouwer dans les espaces à quatre ou plus dimensions (à savoir de caractériser la sphère par les propriétés de l'espace complémentaire).

Une attitude foncièrement différente doit être adoptée si l'on se donne un objet géométrique (aussi général que possible) et si l'on cherche des propriétés nouvelles de cet objet. Si, dans cette attitude, nous définissons la propriété d'une façon *abstraite* ou bien si nous formons de nouvelles notions, le critère est opposé: plus la notion formée, qui exprime des propriétés nouvelles de l'objet, est tranchante, plus sa portée est grande. Dans la topologie des ensembles on trouve tant d'exemples de ce fait qu'il nous semble inutile d'insister. Ce critère oblige aussi

à justifier une notion nouvellement introduite et cela par l'indication de sa signification pour une classe d'objets donnée *indépendamment de cette notion* et aussi générale que possible.

Enfin, je mentionnerai encore une troisième attitude: par des définitions (des axiomes) on peut déterminer une nouvelle classe d'objets satisfaisant aux conditions données. Ensuite on examine d'autres propriétés de l'objet. Pour cette attitude il ne faut pas oublier que le nouvel objet dépend généralement des définitions. Cette attitude est d'usage pour établir une théorie abstraite nouvelle et le développement cohérent de cette théorie doit la justifier. Pratiquement, elle est suggérée par le désir d'étudier les problèmes difficiles d'homéomorphie et d'homotopie au moins dans des conditions plus spéciales et plus faibles. Les trois attitudes sont courantes dans la topologie.

II. — LE PRINCIPE INDUCTIF DE L'ENLACEMENT.

5. — Les pages suivantes seront consacrées à un bref exposé de la théorie infinitésimale des ensembles les plus généraux. Il s'agira sans exception de propriétés d'*origine intégrale* dans le sens du critère énoncé plus haut. Ce sont, d'ailleurs, les résultats d'une suite de recherches que j'avais abordées dans les dernières années et qui, je crois, font connaître pour le moment plusieurs nouvelles relations importantes pour la structure infinitésimale des ensembles. Je voudrais d'ailleurs me restreindre aux questions de principe de ces recherches. La compréhension et la classification de ces principes nous sera facilitée si nous retenons quelques phases du développement de la topologie générale. On peut noter, je crois, trois moments critiques, décisifs pour ce développement.

Le premier moment critique s'est présenté le jour où l'on s'est rendu compte de l'*importance des relations d'enlacement pour la topologie générale*. On avait reconnu notamment que la décomposition d'un espace par un ensemble n'était qu'un cas particulier d'enlacement de l'ensemble avec un cycle de dimension duelle. On sait que cette découverte est due à MM. LEBESGUE

et BROUWER¹. En topologie combinatoire ce sont les théorèmes de dualité qui relèvent le mieux l'importance de cette découverte. Ce sont les relations d'intersection et notamment les indices de Kronecker dont la théorie complète est due à M. LEFSCHETZ qui forment leur outil le plus important.

En particulier, cette conception a permis d'introduire la notion de la multiplicité générale qui est fondamentale pour l'exposé qui suit.

Soit U un voisinage sphérique dans R^n . Un ensemble fermé à r dimensions F dans U est appelé une *multiplicité générale* s'il existe un cycle algébrique Γ^{n-r-1} dans U irréductiblement enlacé avec F ; c'est-à-dire $\Gamma^{n-r-1} \sim 0$ dans $U - F$ tandis qu'on a $\Gamma^{n-r-1} \sim 0$ dans $U - F'$ pour chaque vrai sous-ensemble F' de F ².

La grande importance de ces multiplicités s'explique par leur valeur universelle. Comme M. ALEXANDROFF a pu le montrer, chaque ensemble fermé à r dimensions contient une multiplicité générale à r dimensions³.

Un second point de vue qui — au moins pendant quelques années de suite — a fortement influencé la topologie, était le suivant: on conçoit la nature de la dimension d'un ensemble comme un invariant à définir inductivement, l'induction se rapportant à une suite de décompositions d'un ensemble par des ensembles à un nombre inférieur de dimensions. Ce principe aussi est dû à M. BROUWER.

Le troisième pas est fait par la *théorie de l'approximation* que nous avons déjà mentionnée et dont le développement est dû notamment à MM. ALEXANDROFF et LEFSCHETZ.

Le principe que je voudrais indiquer maintenant apparaissait de plus en plus au cours de mes recherches; il s'agit ici d'une *synthèse du principe de l'enlacement et du principe inductif de la séparation*. J'appellerai ce principe le *principe inductif de l'enlacement* et la configuration des cycles et des ensembles à laquelle il donne lieu le *système inductif de l'enlacement*.

¹ Voir L. PONTRJAGIN, *Math. Annalen*, 105 (1931), pp. 166-167.

² La notation $\Gamma^{n-r-1} \sim 0$ désignera désormais l'existence d'un complexe $K^{n-r} \rightarrow \Gamma^{n-1}$.

³ Voir P. ALEXANDROFF, Dimensionstheorie, *Math. Annalen*, 106 (1932), pp. 161-238.

6. — Décrivons tout d'abord deux opérations très simples qui, formellement, s'appliquent à des ensembles aussi bien qu'à des cycles.

Soit, dans R^n , A^r un ensemble fermé à r dimensions. Nous appelons *décomposition* de A^r la détermination d'un ensemble $A^{(r-1)}$ à $(r - 1)$ dimensions au plus et tel que A^r puisse être représenté comme somme de deux ensembles fermés ${}^1A^r$ et ${}^2A^r$, ${}^1A^r + {}^2A^r = A^{(r-1)}$, ce que nous écrivons $A^r = {}^1A^r + A^{(r-1)} + {}^2A^r$. Nous appelons *extension* d'un ensemble l'opération inverse; un ensemble donné $A^{(r-1)}$ subit l'extension à un ensemble à r dimensions si l'on parvient à déterminer deux ensembles ${}^1A^r$ et ${}^2A^r$ tels que ${}^1A^r + A^{(r-1)} + {}^2A^r = A^r$ soit une décomposition de A^r .

Nous pouvons définir les opérations correspondantes pour les cycles algébriques. Soit Γ^r un cycle algébrique à r dimensions. La *décomposition* de Γ^r en deux complexes ${}^1C^r$, ${}^2C^r$ sera déterminée si nous indiquons un cycle Γ^{r-1} à $r - 1$ dimensions tel que $\Gamma^r = {}^1C^r + {}^2C^r$, ${}^1C^r \rightarrow \Gamma^{r-1}$, ${}^2C^r \rightarrow \Gamma^{r-1}$. Etant donné un cycle Γ^{r-1} nous appelons *extension* de Γ^{r-1} la détermination ou la construction de deux complexes ${}^1C^r$ et ${}^2C^r$ tels que ${}^1C^r + {}^2C^r = \Gamma^r$ soit décomposé par Γ^{r-1} .

Soit $F = B^r$ un ensemble fermé à r dimensions — dans le sens de M. BROUWER — intérieur à un voisinage sphérique U borné dans R^n par une sphère à $(r - 1)$ dimensions. Soient

$$B^r, B^{r-1}, \dots, B^{r-j}, \dots, B^0,$$

une suite d'ensembles fermés à $(r - j)$ dimensions ($j = 0, 1, \dots, r$) tels que chaque ensemble B^{r-j-1} décompose l'ensemble B^{r-j} en deux sous-ensembles ${}^1B^{r-j}$ et ${}^2B^{r-j}$,

$$B^{r-j} = {}^1B^{r-j} + B^{r-j-1} + {}^2B^{r-j}.$$

Soit Γ^{n-r-1} un cycle algébrique (mod. 0) à $(n - r - 1)$ dimensions, satisfaisant à la condition

$$\Gamma^{n-r-1} \not\subset 0 \quad \text{dans} \quad U - B^r$$

et soient

$$\Gamma^{n-r}, \Gamma^{n-r+1}, \dots, \Gamma^{n-r+j}, \dots, \Gamma^{n-r-1}$$

une suite d'extensions du cycle Γ^{n-r-1}

$$\Gamma^{n-r+j} = {}^1Q^{n-r+j} + {}^2Q^{n-r+j},$$

où l'on a pour chaque $j = 0, 1, 2, \dots, r$

$$\begin{aligned} {}^1Q^{n-r+j} &\rightarrow \Gamma^{n-r+j-1} && \text{dans } U - {}^1B^{r-j}, \\ - {}^2Q^{n-r+j} &\rightarrow \Gamma^{n-r+j-1} && \text{dans } U - {}^1B^{r-j}. \end{aligned}$$

Si les suites $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}_{j=0,1,\dots,r}$ et $\{B^{r-j}\}_{j=0,1,\dots,r}$ satisfont à ces conditions, nous dirons qu'elles forment un *système inductif d'enlacement* relatif à l'ensemble F.

Etant donné un système inductif d'enlacement, nous appelons les suites $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$ une *suite fondamentale de cycles* et la suite $\{B^{r-j}\}$ une *suite fondamentale d'ensembles* du système d'enlacement en question.

7. — Etant donné un système inductif d'enlacement, on en tire d'abord une extension inductive de l'important théorème Phragmen-Brouwer-Alexandroff. Conformément à l'hypothèse, l'ensemble $F = B^r$ est un obstacle d'homologie par rapport au cycle Γ^{n-r-1} , c'est-à-dire que l'on a, dans $U - B^r$, $\Gamma^{n-r-1} \not\sim 0$. De ce fait le théorème PHRAGMEN-BROUWER généralisé affirme qu'il existe dans $B^r \text{ rel } S^{n-1}$ un vrai cycle enlacé avec $\Gamma^{n-r-1} \pmod{m_k}$ et totalement non homologue dans B^r

$$Z^r = z_1^r, z_2^r, \dots, z_k^r, \dots$$

où l'on a pour chaque k

$$\begin{aligned} z_k^r &= {}^1C_k^r + {}^2C_k^r, \\ {}^1C_k^r &\rightarrow z_k^{r-1}, \quad - {}^2C_k^r \rightarrow z_k^{r-1} \end{aligned}$$

et où

$$Z^{r-1} = z_1^{r-1}, z_2^{r-1}, \dots, z_k^{r-1}, \dots$$

est un cycle dans B^{r-1} et totalement non homologue 0 dans B^{r-1} . Le cycle Z^r peut être supposé de position générale par rapport à Γ^{n-r-1} de façon que les indices de Kronecker (de module variable m_k) puissent être déterminés pour chaque k .

La généralisation inductive du théorème Brouwer-Alexandroff.

Soit

$$\{ \Gamma^{n-r+j-1} \}_{j=0,1,\dots,r}, \quad \{ B^{r-j} \}_{j=0,1,\dots,r}$$

un système inductif d'enlacement relatif à F. Nous affirmons que :

1° Il existe une suite de cycles entiers

$$\{ Z^{r-j} = z_1^{r-j}, z_2^{r-j}, \dots, z_r^{r-j}, \dots \}_{j=0,1,\dots,r} \pmod{m_k},$$

telle que, pour chaque j , Z^{r-j} soit un cycle entier dans B^{r-j} , totalement non homologue 0 dans B^{r-j} , où

$$z_k^{r-j} = {}^1C_k^{r-j} + {}^2C_k^{r-j},$$

$${}^1C_k^{r-j} \rightarrow z_k^{r-j-1} \quad \text{dans} \quad {}^1B_k^{r-j},$$

$$- {}^2C_k^{r-j} \rightarrow z_k^{r-j-1} \quad \text{dans} \quad {}^2B_k^{r-j};$$

2° On a, pour chaque j , $\Gamma^{n-r+j-1} \sim 0$ dans $U - B^{r-j}$.

Ce théorème se démontre aisément par induction; l'on démontre les propriétés 1° et 2° alternativement pour des j croissants. De la validité de la relation 2° pour $j = 0$ découle — d'après la définition du système d'enlacement — la validité de 2° pour chaque $j = 1, 2, \dots, r$. De ce fait, chaque ensemble B^{r-j} est un obstacle d'homologie du cycle $\Gamma^{n-r+j-1}$ étendu j fois, ce qui explique le nom de « système d'enlacement » pour la configuration formée des suites $\{ \Gamma^{n-r+j-1} \}$ et $\{ B^{r-j} \}$.

En construisant encore les cycles entiers $\{ Z^{r-j} \}$ qui correspondent univoquement aux ensembles décomposants $\{ B^{r-j} \}$, nous obtenons une configuration efficace au point de vue combinatoire. Pour chaque j elle satisfait aux relations 1° et 2° et, pour préciser, nous la notons dans le tableau suivant. Nous appelons cette configuration un « système combinatoire d'enlacement ».

Soit

$$\Gamma^{n-r-1} \sim 0 \quad \text{dans} \quad U - B^r.$$

Les relations suivantes (mod. m_k) sont vraies pour chaque $j = 0, 1, \dots, r$:

$$\begin{aligned} \Gamma^{n-r+j-1} &= {}^1Q^{n-r+j-1} + {}^2Q^{n-r+j-1}, & B^{r-j} &= {}^1B^{r-j} + B^{r-j-1} + {}^2B^{r-j}, \\ {}^1Q^{n-r+j} &\rightarrow \Gamma^{n-r+j-1} & \text{dans} & U - {}^1B^{r-j} \\ - {}^2Q^{n-r+j} &\rightarrow \Gamma^{n-r+j-1} & \text{dans} & U - {}^2B^{r-j}, \\ Z^{r-j} &= \{ z_k^{r-j} = {}^1C_k^{r-j} + {}^2C_k^{r-j} \}_{k=1,2,\dots} & \text{dans} & B^{r-j}, \\ \{ {}^1C_k^{r-j}, - {}^2C_k^{r-j} \rightarrow z_k^{r-j-1} \}_{k=1,2,\dots} & & \text{dans} & {}^1B^{r-j}, {}^2B^{r-j}, \\ \{ \chi({}^1C_k^{r-j}, \Gamma^{n-r+j}) = \chi(- {}^2C_k^{r-j}, \Gamma^{n-r+j}) \neq 0 \}_{k=1,2,\dots} & & & \\ \Gamma^{n-r+j-1} &\not\sim 0 & \text{dans} & U - B^{r-j}. \end{aligned}$$

8. — L'importance du système inductif d'enlacement repose sur le fait suivant: l'on peut, en retenant les suites $\{B^{r-j}\}$ et $\{Z^{r-j}\}$, remplacer la suite fondamentale de cycles $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$ par une suite fondamentale $\{\gamma^{n-r+j-1}\}$ de cycles *arbitrairement petits* qui forme avec les suites $\{B^{r-j}\}$ et $\{Z^{r-j}\}$ un système combinatoire d'enlacement équivalent. En d'autres termes¹:

Pour chaque ε arbitrairement petit il existe une suite de cycles $\{\gamma^{n-r+j-1}\}$,

$$\begin{aligned} \gamma^{n-r+j-1} &= {}^1q^{n-1+j-1} + {}^2q^{n-r+j-1}, \\ {}^1q^{n-r+j} &\rightarrow \gamma^{n-r+j-1} & \text{dans} & U - {}^1B^{r-j}, \\ - {}^2q^{n-r+j} &\rightarrow \gamma^{n-r+j-1} & \text{dans} & U - {}^2B^{r-j}, \\ \delta(\gamma^{n-1}) &< \varepsilon, \end{aligned}$$

qui a les mêmes relations d'intersection et d'enlacement avec les cycles Z^{r-j} que les cycles $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$.

Il est essentiel pour la construction des cycles $\{\gamma^{n-r+j-1}\}$ de ramener un cycle donné à une « position générale » par rapport à un ensemble de dimension complémentaire.

Nous appelons K^{n-r} un complexe en position générale par rapport à un ensemble B^r , si son « échafaudage » à $(n - r - 1)$ dimensions ne rencontre pas l'ensemble B^r .

¹ Voir [7] et surtout [9]. Les chiffres gras entre crochets se rapportent à la bibliographie indiquée à la fin.

Nous dirons qu'un complexe K^{n-1} se trouve en position générale par rapport à la suite fondamentale $\{B^{r-j}\}$, si chaque échafaudage à $(n - r + j - 1)$ dimensions de K^{n-1} est en position générale par rapport à l'ensemble B^{r-j} . Un complexe K^{n-1} peut toujours être ramené à un complexe équivalent $*K^{n-1}$ qui serait en position générale par rapport au système $\{B^{r-j}\}$. La construction de $*K^{n-1}$ se fait par une généralisation de la méthode des modifications infinitésimales de complexes de M. Alexandroff. Remarquons encore que les complexes habituels de simplexes étant beaucoup trop « rigides » ne se prêtent guère à la solution du problème de la position générale d'un complexe et d'un ensemble et, surtout, pas dans le cas d'un système d'ensembles $\{B^{r-j}\}$. Pour cette raison l'on construit les complexes modifiés d'éléments qui sont eux-mêmes des complexes correspondant d'une façon univoque et réciproque aux simplexes du complexe donné.

Les invariants d'intersection et d'enlacement nous permettent de construire les cycles $\{\gamma^{n-r+j-1}\}$ sur un complexe à $(n - 1)$ dimensions et en position générale par rapport au système d'ensembles $\{B^{r-j}\}$. Cette construction découle du simple principe de décompositions « disjonctives » de cycles, qui correspondent aux décompositions d'ensembles de dimension complémentaire et sont déterminées par ces dernières [9].

Nous pouvons maintenant formuler le lemme fondamental de cette théorie.

Si les cycles $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$ et les ensembles $\{B^{r-j}\}$ forment un système inductif d'enlacement, alors pour chaque nombre $h = 0, 1, \dots, r$, il existe dans F une multiplicité à h dimensions *arbitrairement petite* f^h , contenant des points de l'ensemble B^0 . Il existe, en plus, dans B^0 un *point de multiplicités à h dimensions* P^h , c'est-à-dire il existe dans F^0 une suite de multiplicités (générales) à h dimensions $f_1^h \supset f_2^h \supset \dots$ décroissantes et convergeant en un point P^h intérieur à B^0 .

Dans la définition du système inductif d'enlacement la suite fondamentale était donnée d'une façon purement formelle. Par conséquent, les théorèmes énoncés ci-dessus sont valables d'une manière générale pour une multiplicité arbitraire F ou, plus généralement encore, pour un ensemble $F = B^r$ satisfaisant par

exemple aux hypothèses du théorème Phragmen-Brouwer. Le système inductif d'enlacement doit avoir une construction correspondante au problème concret. L'on construit alternativement les cycles et les ensembles de suites fondamentales $\{\Gamma^{n-r+j-1}\}$ et $\{B^{r-j}\}$ pour les j croissants et l'on fait sur les ensembles B^{r-j} des hypothèses qui autorisent des conclusions inductives. L'on voit ainsi que ce sont seulement les démonstrations des théorèmes exposés brièvement dans la suite qui font voir toute la fécondité des systèmes inductifs d'enlacement.

III. — LA STRUCTURE D'ENSEMBLES À PARTIR DE MULTIPLICITÉS ARBITRAIREMENT PETITES.

LES NOUVEAUX THÉORÈMES DE PAVAGE.

9. — C'est l'extension locale du théorème Phragmen-Brouwer-Alexandroff qui forme le premier échelon de la théorie infinitésimale des ensembles [1, 2]. Le théorème suivant est valable :

Soit F une multiplicité à r dimensions ou, plus généralement, un ensemble ($\dim F = r$) satisfaisant aux hypothèses du théorème Brouwer-Alexandroff. Soit $F = {}^1F + B^{r-1} + {}^2F$ une décomposition de F par un ensemble B^{r-1} à $(r - 1)$ dimensions en deux composants ouverts 1F et 2F . Alors, il existe une multiplicité à r dimensions *arbitrairement petite* $f^r = {}^1f^r + b^{r-1} + {}^2f^r$ décomposé par un sous-ensemble b^{r-1} de B^{r-1} en deux parties ouvertes ${}^1f^r \subset {}^1F$ et ${}^2f^r \subset {}^2F$.

La démonstration de ce théorème [6] découle de l'invariance locale des cycles placés dans les deux premières lignes du système d'enlacement. Le cas particulier $r = n - 1$ de ce théorème fut démontré pour la première fois et par des méthodes très différentes par M. H. D. URSELL et moi-même [2, 3, 4, 5, 8]. Les représentations dites harmoniques de complexes qui surgissent dans ce cas particulier et leurs invariants sont aussi, me semble-t-il, intéressantes en elles-mêmes. Ce théorème entraîne aussi que l'ensemble de tous les points de multiplicités r -dimensionnels dans F est à une dimension.

Les résultats suivants montrent très nettement que *la totalité*

des multiplicités arbitrairement petites de chaque dimension $h \leq r$ a dans un ensemble à r dimensions la même étendue que les points de l'ensemble lui-même [7, 9]. En d'autres termes, si nous considérons toutes les multiplicités arbitrairement petites de diamètre $\leq \delta$ (δ étant arbitrairement petit), nous voyons qu'elles forment — dans un sens qui s'impose [9, § 1] — un système r -uplement connexe et cela que ce soient des courbes ($h = 1$), des surfaces ($h = 2$) ou des hypersurfaces de dimension arbitraire $h \leq r$. Nous aurons un résultat encore plus précis en considérant l'extension dimensionnelle des totalités des points de convergence des systèmes de multiplicités arbitrairement petites de chacune des dimensions fixes, c'est-à-dire des points de multiplicités définis plus haut (voir le lemme fondamental de § II). Mais pour cela une conception appropriée de la dimension s'impose.

La notion relative de dimension. Soit A un ensemble fermé à r dimensions dans R^n . Nous dirons qu'un ensemble donné Φ (qui n'est pas nécessairement fermé) dans R^n a la *dimension homogène* j relativement à A ($\text{hom dim } \Phi = j \text{ rel } A$) si j est le plus petit entier positif tel que chaque couple A' et A'' de sous-ensembles fermés et disjoints de A peut être séparé par un ensemble $B \subset A$ dans A ayant au plus la dimension $(r - 1)$, avec $\text{hom dim } \Phi = j - 1 \text{ rel } B$. Si C est un sous-ensemble fermé quelconque de A alors on a $\text{hom dim } \Phi = -1 \text{ rel } C$ si Φ et C sont disjoints. Si C est composé d'un seul point, alors on a $\text{hom dim } \Phi = 0 \text{ rel } C$ si le point C est intérieur à Φ , $\text{hom dim } \Phi = -1 \text{ rel } C$ s'il ne l'est pas¹.

L'on voit immédiatement que cette notion de dimension est extrêmement intuitive. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant:

Soient F un ensemble à r dimensions dans R^n et Φ^h la totalité des points de multiplicités de dimension h . Alors, pour chaque valeur de $h = 0, 1, \dots, r$ l'ensemble Φ^h a la dimension homogène r relativement à F .

¹ Il est évident que cette définition spéciale s'impose pour la dimension relative à un point. Soient A un segment $(0, 1)$ et $P = A$. Les ensembles de séparation B sont formés de points singuliers et ne contiennent pas de parties disjointes. Pour avoir $\text{hom dim } P = 1 \text{ rel } A$ il faut aussi avoir $\text{hom dim } P = 0 \text{ rel } B$ (pour chaque B).

Ces théorèmes et aussi ceux que j'exposerai dans la suite n'ont été démontrés jusqu'à présent que pour les ensembles formant des obstacles d'homologie pour des sphères à $(n - r - 1)$ dimensions. Par conséquent, ces théorèmes sont en tous cas valables pour tous les ensembles à $(r - 1)$ dimensions dans R^n . En général, ils sont valables pour tous les cas où l'ensemble satisfait aux hypothèses du théorème inductif Phragmen-Brouwer.

Les moyens dont nous disposons aujourd'hui nous permettent de démontrer pour chaque entier positif $j \leq \left(r - \frac{n+1}{2}\right)$ le théorème suivant, F étant un ensemble arbitraire à r dimensions et $2r > n + 1$.

La totalité Φ^r de tous les points de multiplicités à r dimensions de F , a au moins la dimension homogène r rel F .

10. — Soient F un ensemble à r dimensions dans un voisinage sphérique U de R^n et s^{n-r-1} une hypersphère à $(n - r - 1)$ dimensions et ~ 0 dans $U - F$. Soit ε un nombre positif arbitrairement petit et soit

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_i + \dots + F_m, \quad \delta(F_i) < \varepsilon$$

une décomposition de l'ensemble F . Il est connu qu'il existe, pour chaque ε , des décompositions de F dont chaque k ($k = 2, 3, \dots, 2 + 2$) parties aient toujours une intersection à $(r - k + 1)$ dimensions. Appelons ces décompositions de F des décompositions *canoniques*. Les théorèmes de pavage suivants sont valables [10]:

Pour chaque ε suffisamment petit il existe $r + 1$ parties de chaque décomposition canonique de F qui contiennent des points d'une multiplicité générale arbitrairement petite f^n de chaque dimension $h = 0, 1, \dots, r$.

Il existe, de ce fait, $r + 1$ parties de chaque décomposition canonique de F , ayants des points communs sur des courbes, surfaces et hypersurfaces générales arbitrairement petites de chaque dimension. Il s'agit ici d'un système fixe de $r + 1$ parties pour tous les h . L'on voit aisément que le lemme fondamental

de M. LEBESGUE correspond au cas $h = 0$ tandis que, pour chaque $h > 0$, nous trouvons un théorème de pavage de dimension supérieure.

La démonstration des théorèmes de pavage découlant du principe inductif d'enlacement donne aussi un résultat *purement quantitatif* sur les ensembles.

Pour avoir l'effet du théorème de M. Lebesgue ou des nouveaux théorèmes de pavage, nous devons évidemment supposer le ε de la décomposition de F « suffisamment petit ». Maintenant nous pouvons reconnaître, au moins en principe, la valeur et la signification de cet ε . Ici de nouveau nous nous restreignons au cas d'ensembles F ($\dim F = r$) formant un obstacle d'homologie de la sphère à $(n - r - 1)$ dimensions dans un voisinage sphérique U de R^n .

L'effet de tous les théorèmes de pavage $r + 1$ se présente pour chaque $\varepsilon < \frac{1}{3^r} D$, D étant la distance $\rho(s^{n-r-1}, F)$.

Par conséquent, le ε des théorèmes de pavage dépend de r et D . Plus grande peut-on supposer la distance D , plus grand ε peut être choisi. Dans le cas absolu, où F forme un obstacle d'homologie d'une sphère à $(n - r - 1)$ dimensions R^n , il se peut évidemment qu'on puisse supposer D arbitrairement grand. Dans ce cas l'on peut, de ce fait, supposer ε arbitrairement grand, c'est-à-dire $\leq M$, M étant un entier positif arbitrairement grand. Il serait intéressant, me semble-t-il, de déterminer le ε pour des classes plus spéciales d'ensembles et de figures géométriques.

Les points de multiplicités de chaque dimension $h = 0, 1, \dots, r$ permettent aussi d'apporter plus de précision aux théorèmes de pavage ¹ [7, 10].

F étant dans U un ensemble enlacé avec la sphère s^{n-r-1} (ou, plus généralement, ayant $s^{n-r-1} \not\sim 0$ dans $U - F$), alors il existe pour chaque $\varepsilon < \frac{1}{3^r} \rho(F, s^{n-r-1})$ une décomposition canonique de F avec $r + 1$ parties, qui contiennent un point de multiplicités commun de chaque dimension $h = 0, 1, \dots, r$.

¹ La démonstration des nouveaux théorèmes de pavage pour tous les ensembles satisfaisant aux conditions du théorème inductif Phragmen-Brouwer sera indiquée dans un travail postérieur.

IV. — AUTRES PROBLÈMES.

11. — Les résultats indiqués plus haut nous permettent de considérer les multiplicités générales comme des éléments à dimension supérieure d'un ensemble. Au moins d'une façon infinitésimale nous pourrions comparer la composition d'un ensemble à partir de multiplicités arbitrairement petites à la composition d'un simplexe à partir de simplexes arbitrairement petits de chaque dimension. Sans doute, ce sont ici les premiers résultats obtenus dans cette direction; ils permettent cependant de poser, aussi globalement, plusieurs autres problèmes. Pour terminer, je voudrais en mentionner quelques-uns ¹.

La tâche consiste en la construction d'un système inductif d'enlacement, correspondant au problème concret donné. En général, la solution de ce problème est facile pour le cas d'ensembles formant des obstacles d'homologie des hypersphères. Dans le cas général d'ensembles enlacés avec des cycles arbitraires, on peut facilement étendre les cycles j fois, si l'on a $j < \left(r - \frac{n+1}{2}\right)$. En conséquence, nous ne pouvons établir des nouveaux théorèmes de pavage que jusqu'à la j -ème dimension. Pour des $j \leq r$ et des $r < n$ arbitraires la solution générale n'existe pas encore ².

¹ D'autres problèmes liés immédiatement à la théorie exposée ici sont indiqués dans les travaux mentionnés dans la bibliographie.

² Ayant déjà terminé le manuscrit de cette conférence, j'ai pu encore démontrer les théorèmes de pavage, de même que les théorèmes énoncés dans le paragraphe 9, pour tous les ensembles fermés à un nombre arbitraire de dimensions dans \mathbb{R}^n . En même temps le problème d'étendre r fois un cycle par rapport à un F arbitraire dans U a été résolu.

La solution repose sur le lemme suivant:

Soient F un ensemble fermé à r dimensions arbitraire dans \bar{U} et Γ^{n-r-1} un cycle arbitraire (mod. 0) à $(n - r - 1)$ dimensions dans $U - F$; $\Gamma^{n-r-1} \not\sim 0$ dans $U - F$. Alors il existe une suite de complexes à $(n - r)$ dimensions $\{K_\nu^{n-r}\}_{\nu=1, 2, \dots}$

$$K_\nu^{n-r} \rightarrow \Gamma^{n-r-1} \quad \text{dans } U, \nu = 1, 2, \dots$$

tels que $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \{K_\nu^{n-r} F\}$ soit un ensemble à 0 dimensions.

12. — D'autres problèmes se présentent si l'on veut caractériser les multiplicités classiques à ce nouveau point de vue. La définition de l'ordre des points de multiplicités peut être considérée comme un travail préparatoire dans cette direction.

Soient $\{f_n^h\}$ et $\{f_m^h\}$ pour $n, m = 1, 2, \dots$ deux suites de multiplicités décroissantes à h dimensions ayant un point limite P commun. Si une multiplicité f_μ^h (pour $m = \mu$) contient toutes les f_n^h pour chaque μ arbitrairement grand et si, réciproquement, une multiplicité f_n^h contient presque toutes les f_m^h si grand que soit $n = \nu$, alors nous appelons les suites $\{f_n^h\}$ et $\{f_m^h\}$ *équivalentes* et nous dirons qu'elles définissent le point P comme un point de multiplicités à h dimensions. Si toutes les suites qui définissent un point P comme un point de multiplicités à h dimensions sont équivalentes, nous appellerons P un point de multiplicités *simple*. Il est clair que le nombre (fini ou infini) de suites $\{f_n^h\}$ non équivalentes définissant le point P comme un point de multiplicités à h dimensions peut être considéré comme ordre (à h dimensions) de P .

F étant un ensemble à r dimensions, nous appelons un point P de F point *régulier* si, δ étant un nombre arbitrairement petit, il existe un $\eta < \delta$ et tel qu'une multiplicité à r dimensions de diamètre $\leq \delta$ contienne tous les points de F intérieurs à un voisinage $U(\eta)$. Un ensemble F est dit *régulier* si tous ses points sont réguliers. Il est clair qu'un point régulier de F doit être simple dans la dimension r -ème. Il serait intéressant de savoir si un ensemble fermé F dont tous les points sont des points simples dans la r -ème dimension est régulier lui-même.

Il serait notamment intéressant de savoir si la notion générale de multiplicité permettrait à elle seule de caractériser les multiplicités classiques¹. L'on pourrait essayer d'appliquer ici aussi le principe inductif.

Une multiplicité générale à h dimensions (et notamment dans le sens absolu, c'est-à-dire définie dans $U = R^n$) est appelée *simplement connexe (localement) dans la dimension $(h - 1)$ -ème* si chaque point P de F peut être séparé de chaque point $R \neq P$ de F par une multiplicité à $(h - 1)$ dimensions f^{h-1} placée dans

¹ En se servant des nombres de Betti généralisés M. Lefschetz a résolu ce problème pour des ensembles fermés, M. E. Čech pour des espaces topologiques.

$U(P, \delta)$ (pour chaque δ) et simplement connexe (localement) dans la dimension $(h - 2)$ -ème. L'induction peut ici commencer par f^0 ou f^1 , c'est-à-dire par des cercles topologiques. La question qui se pose est la suivante: *les ensembles à r dimensions, localement simplement connexes dans la $(r - 1)$ -ème dimension, sont-ils des multiplicités classiques* (dans le sens étendu de MM. VAN KAMPEN et PONTRJAGIN) ?¹.

13. — Cette question ne doit pas être confondue avec le problème de caractériser les multiplicités classiques par les propriétés de l'espace complémentaire et notamment avec le problème de la réciproque du théorème de Jordan dans les espaces à un nombre supérieur de dimensions. Ce dernier problème a aujourd'hui de l'intérêt aussi dans R^3 . Il faut ici distinguer entre les conditions locales (dans le sens ordinaire) et les conditions globales qui sont plus essentielles. Les premières peuvent facilement être indiquées de diverses manières; la seule solution dans R^3 connue jusqu'à présent² repose sur l'hypothèse de la connexion simple du domaine complémentaire d'une surface fermée. Il est naturel que la démonstration se serve du théorème de dualité de M. ALEXANDER. Mais je voudrais remarquer ici qu'il existe une forme purement ensembliste de la réciproque du théorème de Jordan dans R^3 .

Pour qu'une surface F à deux dimensions dans R^3 , fermée et régulière (dans le sens indiqué plus haut) dans chaque point soit une sphère topologique il faut et il suffit que chaque section irréductible d'un domaine complémentaire de F soit une multiplicité de Cantor.

La condition de régularité pourrait être remplacée par une autre condition, aussi purement ensembliste³. Bien que la forme de ce théorème soit purement ensembliste, sa démonstration est essentiellement combinatoire et ne pourrait guère être ramenée immédiatement aux théorèmes de dualité. L'on remarque toujours que les problèmes ensemblistes sous une *forme générale*

¹ L'on sait que cette assertion est vraie pour le cas le plus simple $h = 2$.

² Voir R. L. WILDER, *Math. Annalen*, 109 (1933), p. 273.

³ Si l'on voulait se servir de notions plus anciennes, il suffirait d'exiger (localement) que la surface F soit accessible et « unbewallt » à partir des domaines complémentaires.

ne peuvent être résolus que par des moyens combinatoires et conduisent souvent à des nouveaux problèmes combinatoires.

Je ne saurais indiquer à quel point une surface fermée dans R^n et satisfaisant à des conditions analogues, doit être une multiplicité dans le sens classique.

14. — Nous voulons revenir encore à des multiplicités générales.

La supposition suivante indique un problème global très intéressant.

Soit F une variété générale à r dimensions. Soient A^h et B^h deux sous-ensembles fermés à h dimensions de F , pour un $h = 0, 1, \dots, r - 1$ fixe. Nous prétendons qu'il existe toujours une multiplicité de Cantor à $(h + 1)$ dimensions T^{h+1} contenant A^h et B^h .

Ce problème est très lié au problème du *prolongement* des multiplicités arbitrairement petites à h dimensions dans F , et ce dernier présente des analogies avec les surfaces de Riemann. En général, la possibilité d'une analogie même globale entre les ensembles fermés et les espaces de Riemann n'est point absurde. L'on pourrait, par exemple, envisager les multiplicités générales comme des *surfaces pliées une infinité de fois* et les ensembles comme des totalités de telles surfaces; il n'est pas impossible d'avoir une vue des éléments d'accumulation qui se présentent ainsi. Dans R^3 l'on connaît ces éléments qu'on pourrait aussi appeler des « ideal elements ». Il est sûr que les recherches sur la totalité de ces singularités d'un ensemble se feront par les méthodes de la topologie combinatoire.

¹ Il est facile de démontrer cette assertion pour $h = 0$.

Dans R^n l'on peut toujours relier un couple A^h et B^h d'ensembles à h dimensions par une multiplicité de Cantor T^{h+1} . Considérons une suite de décompositions en simplexes $z(\varepsilon^v)$ de R^n dont les diamètres tendent vers 0. Déterminons à partir des $(h + 1)$ — simplexes de $z(\varepsilon^1)$ une variété de Cantor K_1^{h+1} telle que l'on ait $d(A^h + B^h, K_1^{h+1}) < \varepsilon^1$. Ajoutons à K_1^{h+1} un complexe K_2^{h+1} de tous les $(h + 1)$ — simplexes de $z(\varepsilon^2)$ dont la distance de $(A^h + B^h)$ serait inférieure à ε^2 , etc. L'enveloppe fermée de ΣK_v^{h+1} pour $v \rightarrow \infty$ est une multiplicité de Cantor à $(h + 1)$ dimensions, reliant A^h et B^h .

BIBLIOGRAPHIE ¹

- [1] B. KAUFMANN, Sur les surfaces fermées générales et la dimension locale. *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 198 (1934).
- [2] (Id.), Cantor Manifolds lying on a closed surface. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 30 (1934).
- [3] (Id.), Über die Struktur ebener Cantorscher Mannigfaltigkeiten. *Ibid.*, 30 (1934).
- [4] H. D. URSELL, Cantor Manifolds lying on a closed surface, Part II. *Ibid.*, 31 (1935).
- [5] B. KAUFMANN und H. D. URSELL, The Dissection of closed Surfaces and the Phragmen-Brouwer-Alexandroff Theorem. *Proc. N.A.S. (U.S.A.)*, 20 (1934).
- [6] B. KAUFMANN, Dissection of closed sets of arbitrary Dimension and the generalised Brouwer-Alexandroff Theorem. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 31 (1935).
- [7] B. KAUFMANN, Sur les propriétés infinitésimales des ensembles fermés de dimension arbitraire. *Comptes rendus de l'Acad. des Sciences*, 201 (1935).
- [8] (Id.), Der lokale Dimensionsbegriff. *Math. Annalen*, 112 (1935).
- [9] (Id.), On infinitesimal properties of closed sets of arbitrary dimension paraîtra dans les *Annals of Math.*
- [10] (Id.), On the extension of the Pflastersatz. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 32 (1936).

NOTES COMPLÉMENTAIRES A MA CONFÉRENCE
SUR LA TOPOLOGIE DES VARIÉTÉS

1. — Au lieu du passage de la Géométrie anallagmatique de M. J. HADAMARD, cité dans ma conférence sur la Topologie des variétés, t. 35, p. 246, il serait préférable de lire la Note L insérée dans le tome II de ses *Leçons de Géométrie élémentaire* (7^{me} édition, Paris 1932).

2. — Le dernier paragraphe de la page 249 ne concerne que les surfaces orientables. Car la variété-voisinage d'une surface non-orientable immergée dans l'espace à quatre dimensions doit être orientable, comme chaque variété à $n - 1$ dimensions immergée sans singularités dans l'espace euclidien à n dimensions. Or, le produit topologique du cercle et d'une surface non-orientable est non-orientable, lui aussi. — Voir à ce sujet H. SEIFERT, Algebraische Approximation von Mannigfaltigkeiten, *Math. Zeitschrift* 40 (1936) et W. HANTZSCHE, Einlagerung von Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume, *ibid.* 42 (1937).

3. — L'article de M. E. STIEFEL, cité à la page 250, vient de paraître: *Comm. math. helv.*, vol. 8, p. 305-353. Il faudrait le lire également au sujet des variétés immergées dans des espaces euclidiens.

W. THRELFALL.

¹ Cette bibliographie indique seulement les travaux s'occupant directement de la théorie exposée ici.