

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES TRANSFORMATIONS CIRCULAIRES RÉELLES DU PLAN
Autor: Guilhem, R. Saint
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28031>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.05.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LES TRANSFORMATIONS CIRCULAIRES RÉELLES DU PLAN

PAR

R. SAINT GUILHEM (Paris).

SOMMAIRE

CHAPITRE I. — *Généralités.* — Si l'on met à part les similitudes, toute transformation circulaire Γ se réduit au produit d'une inversion par un retournement (transformations circulaires directes) ou par un déplacement (transformations circulaires inverses). L'ensemble constitue le groupe circulaire total Γ .

CHAP. II. — *Les transformations circulaires directes (groupe \mathcal{C}).* — Toute \mathcal{C} admet deux points doubles réels distincts ou confondus. On peut la transformer, par exemple au moyen d'une inversion, en une similitude directe \mathcal{S} dont le rapport k et l'angle α sont les invariants caractéristiques de \mathcal{C} dans le groupe Γ .
Etude des différents types de \mathcal{C} . Type réciproque: involution plane.

CHAP. III. — *Les transformations circulaires inverses \mathcal{C} .* — Elles se divisent en trois espèces: la première espèce \mathcal{C}_h a deux points doubles réels distincts, et admet pour image une similitude inverse \mathcal{S} , dont le rapport k est l'invariant caractéristique de \mathcal{C}_h ; la deuxième espèce \mathcal{C}_l a deux points doubles confondus et admet pour image un retournement \mathcal{D} : elle constitue un seul type intrinsèque; la troisième espèce \mathcal{C}_r n'a pas de points doubles réels, mais elle admet un couple de points conjugués réels; son image est une « antirotation » \mathcal{T} dont l'angle α est l'invariant caractéristique de \mathcal{C}_r . L'inversion simple \mathcal{I} est un cas particulier commun aux trois espèces.

CHAP. IV. — *Application à la décomposition des diverses transformations Γ .* — Etude du groupe des transformations ayant les mêmes pôles; décomposition d'une Γ en un produit de deux Γ simples. — Groupe des transformations ayant un point double commun. — Produit de n inversions successives; décomposition d'une \mathcal{C} en un produit de 4 inversions, d'une \mathcal{C} en un produit de 3 inversions.

On se propose ici de rechercher toutes les transformations circulaires ponctuelles et réelles du plan, et de donner ensuite leurs propriétés fondamentales par des voies élémentaires. Dans ce but on démontrera directement que toutes ces transformations admettent un couple réel de points doubles ou de points conjugués; on en déduira la possibilité de représenter chaque transformation circulaire par une autre plus simple (le plus souvent une similitude), dans laquelle sont mises en évidence les propriétés intrinsèques de la première. On obtient ainsi très simplement des résultats essentiels que la méthode classique des affixes imaginaires ne pourrait donner qu'après de longs calculs. En outre la méthode employée ici s'applique sans changement aux transformations sphériques de l'espace à trois dimensions, qui feront l'objet d'une étude faisant suite à celle-ci.

PRÉLIMINAIRES.

§ 1. — Nous supposons connus:

- 1° Les propriétés classiques de l'inversion dans le plan;
- 2° Les définitions relatives aux groupes de transformations géométriques;
- 3° Les théorèmes suivants concernant les similitudes du plan:

a) *Toute similitude directe peut être considérée comme le produit d'une homothétie par une rotation autour du centre d'homothétie.* Cette décomposition est possible d'une seule manière; le point double unique ainsi mis en évidence est le *centre* ou *pôle* de similitude. En général, il n'y a pas de droite double ni de cercle double.

b) *Toute similitude inverse peut être considérée comme le produit d'une homothétie par une symétrie autour d'une droite passant par le centre d'homothétie.* Ce point ω et cette droite Δ sont dits *centre* ou *pôle* et *axe* de similitude inverse. Ici, il y a, comme tout à l'heure, un point double: le centre ω ; mais il y a *deux* droites doubles: l'axe Δ et la perpendiculaire Δ' à l'axe menée par le centre.

En particulier, on passe d'une figure à une autre directement égale par un *déplacement* qui se réduit à une rotation ou à une

translation; d'une figure à une autre inversement égale, par un *retournement*, qui se réduit à une symétrie autour d'une droite, suivie d'une translation parallèle à cette droite.

CHAPITRE I. — DÉFINITIONS ET THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

§ 2. — *Définition.* — Une transformation ponctuelle réelle, biunivoque, et continue, du plan sera dite circulaire si elle transforme un cercle quelconque en un autre cercle. Dans cette définition le mot « cercle » désigne une circonférence proprement dite ou une droite.

Exemple: une inversion, un produit d'inversions et de similitudes.

Les transformations circulaires du plan forment un groupe. Evident.

THÉORÈME I. — *Si une transformation circulaire Γ est définie pour tous les points du plan euclidien, elle se réduit à une similitude.*

Soit en effet A' le transformé d'un point quelconque A ; D'_1 et D'_2 deux droites passant par A' . Les cercles D_1 et D_2 qui ont D'_1 et D'_2 pour homologues se coupent en A et en un autre point \bar{A} , qui ne peut avoir d'homologue \bar{A}' , car ce point \bar{A}' devrait être commun à D'_1 et D'_2 , tout en étant distinct de A' . Donc D_1 et D_2 sont nécessairement des droites.

Par suite, les droites de la figure F' sont les transformées des droites de F ; Γ est donc une homographie. Comme elle transforme les cercles en cercles, c'est une similitude.

Corollaire. — *Si Γ ne se réduit pas à une similitude, il existe au moins un point Φ du plan pour lequel elle n'est pas définie.*

Le raisonnement qui précède montre que les cercles passant par un tel point Φ sont transformés en droites. Nous allons montrer qu'il n'existe qu'un point Φ , c'est-à-dire que:

THÉORÈME II. — *Une transformation circulaire proprement dite Γ étant donnée, il existe dans le plan un point Φ et un seul tel que tous les cercles passant par Φ soient transformés en droites.*

En effet, s'il existait deux points singuliers de ce genre Φ_1 et Φ_2 , on pourrait prendre des couples de cercles C_1 et C_2 passant

respectivement par Φ_1 et Φ_2 , se coupant en A et B. Γ serait définie pour A et B, et transformerait (C_1) et (C_2) en deux droites (C'_1) et (C'_2) qui devraient se couper en deux points distincts A' et B', ce qui est absurde. Il existe donc un point Φ et un seul.

Le point Φ sera dit *foyer-objet* de la transformation Γ .

THÉORÈME III. — *Il existe dans le plan un point Ψ et un seul tel que les cercles transformés de toutes les droites du plan passent par Ψ .*

Le point Ψ sera le *foyer-image* de Γ .

Ce théorème se démontre d'une manière analogue au théorème II. Ou encore, il résulte de l'application du théorème II à la transformation Γ^{-1} inverse de Γ . Il résulte aussi des propriétés que nous allons donner maintenant et qui découlent elles-mêmes, si l'on veut, du seul théorème II.

§ 3. — THÉORÈME IV. — *Toute transformation circulaire proprement dite Γ est le produit d'une inversion par une égalité (déplacement ou retournement).*

Soit en effet I une inversion de pôle Φ et de puissance arbitraire. Soit F la figure primitive, F' la transformée par Γ , F_0 par I. On passe de F_0 à F' par une transformation circulaire, produit de I par Γ , qui se réduit à une similitude Σ , car les droites de F' correspondent aux cercles de F passant par Φ , et de même les droites de F_0 .

Donc $F' = F_0 \cdot \Sigma$ et $\Gamma = I\Sigma$

En choisissant convenablement la puissance de l'inversion I, on a

$$\boxed{\Gamma = I\Delta} \quad (1)$$

Δ étant soit un déplacement \mathcal{O} , soit un retournement D.

Corollaire. — Les transformations Γ conservent les angles (en grandeur).

Elles se divisent en deux classes: la première, celle des *transformations circulaires directes*

$$\boxed{c = ID} \quad , \quad (2)$$

où D est un retournement, conserve les angles en grandeur et en signe. La deuxième conserve les angles en grandeur, mais change leur signe: c'est celle des *transformations circulaires inverses*:

$$\boxed{C = I\mathcal{O}} \quad , \quad (3)$$

où \mathcal{O} est un déplacement.

Chacune de ces deux familles est à 6 paramètres: 3 pour l'inversion, 3 pour le déplacement ou le retournement.

Les \mathcal{C} forment un groupe; les C non.

Point à l'infini du plan. — C'est un point impropre ∞ défini comme étant commun à toutes les droites du plan. Une droite est un cercle qui passe par ∞ . Une transformation Γ transforme son foyer-objet Φ en ∞ , et transforme ∞ en son foyer-image Ψ . Elle est donc *définie et biunivoque pour tous les points du plan ainsi étendu par l'adjonction du point impropre ∞* .

CHAPITRE II. — GROUPE DES TRANSFORMATIONS CIRCULAIRES DIRECTES.

§ 4. — La transformation générale $\mathcal{C} = ID$ est définie par un cercle (I) de centre Φ (cercle d'inversion) et un vecteur \vec{D} de retournement. Le foyer image Ψ est le transformé de Φ par le retournement D . Les éléments géométriques conservés dans l'inversion I subissent simplement le retournement: tel est le cas du cercle (I) et des cercles orthogonaux à celui-là, en particulier des droites passant par Φ , qui sont *les seules droites du plan transformées en droites par \mathcal{C}* .

Soit P le point où une droite (L) passant par Φ coupe son homologue (L') (qui passe naturellement par Ψ) (fig. 1); quand (L) tourne autour de Φ , P décrit une hyperbole équilatère (H) passant par Φ et Ψ , et admettant comme asymptotes la droite (D) et la perpendiculaire (Δ) menée à (D) au milieu O de $\Phi\Psi$. (L) et (L') découpent sur (D) et (Δ) deux segments constants

$$\vec{dd'} = \vec{D} \quad , \quad \vec{\delta\delta'} = \vec{\Phi\phi} \quad .$$

On pourrait donc définir une transformation \mathcal{C} en se donnant une hyperbole équilatère (H) et un point Φ sur l'une de ses branches. L'homologue M' de M se construit alors en joignant

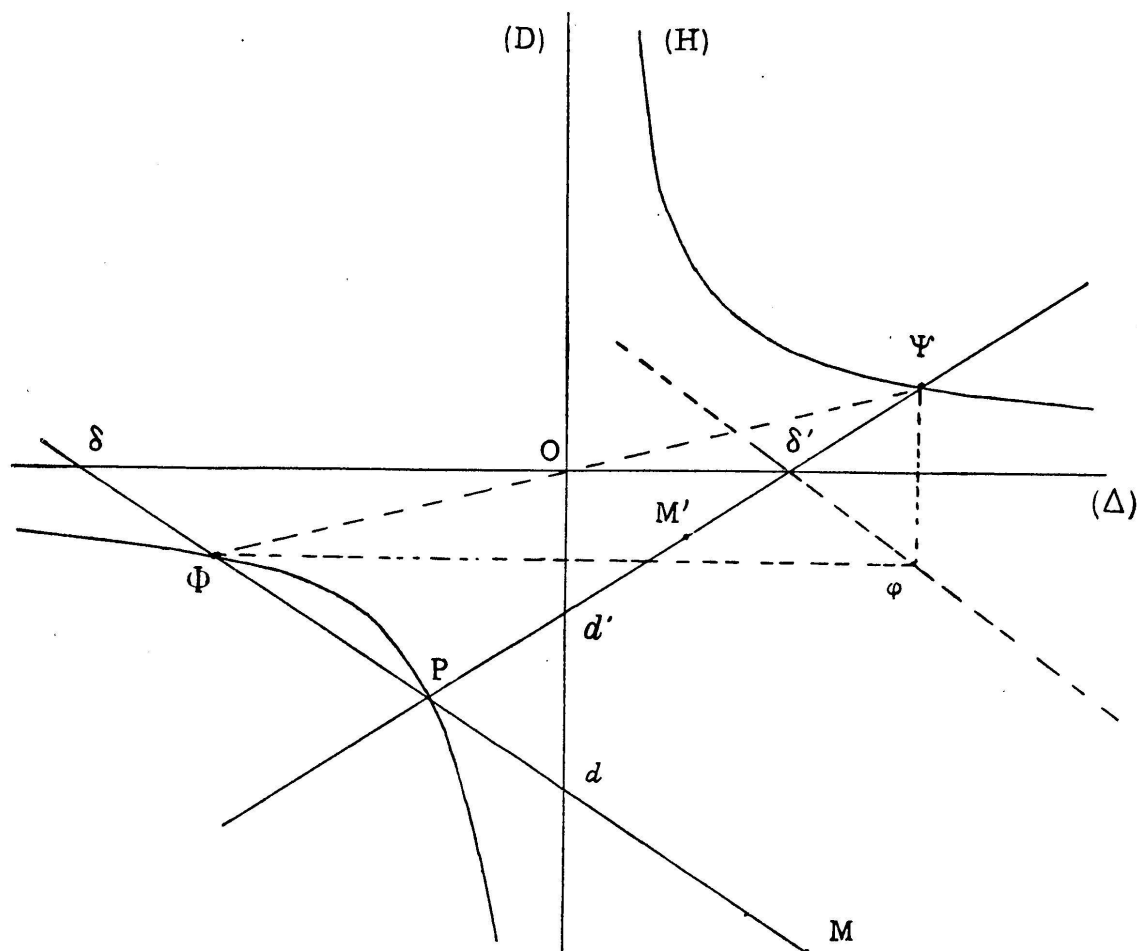


Fig. 1.

ΦM qui coupe (H) en P, puis en portant sur ΨP un segment $\Psi M'$ tel que

$$\Phi M \cdot \Psi M' = R^2 \quad (4)$$

R étant une constante arbitraire (c'est-à-dire indépendante de (H) et de Φ).

On pourrait, dès à présent, étudier les différentes classes de \mathcal{C} à partir des remarques précédentes. Mais la méthode suivante mène plus directement au résultat.

§ 5. — THÉORÈME V. — *La transformation \mathcal{C} admet deux points doubles toujours réels. Ils sont diamétralement opposés sur l'hyperbole équilatère (H), c'est-à-dire qu'ils forment avec les deux*

foyers un parallélogramme, dit parallélogramme de base de la transformation \mathcal{C} .

Démonstration: Soit ω un point double de \mathcal{C} ; d'après ce qui précède, ω est sur (H) et vérifie la condition $\Phi\omega.\Psi\omega = R^2$.

Inversement tout point vérifiant ces deux conditions est point double de \mathcal{C} . Il en résulte que si ω est point double, il en est de même de son symétrique $\bar{\omega}$ par rapport au point O.

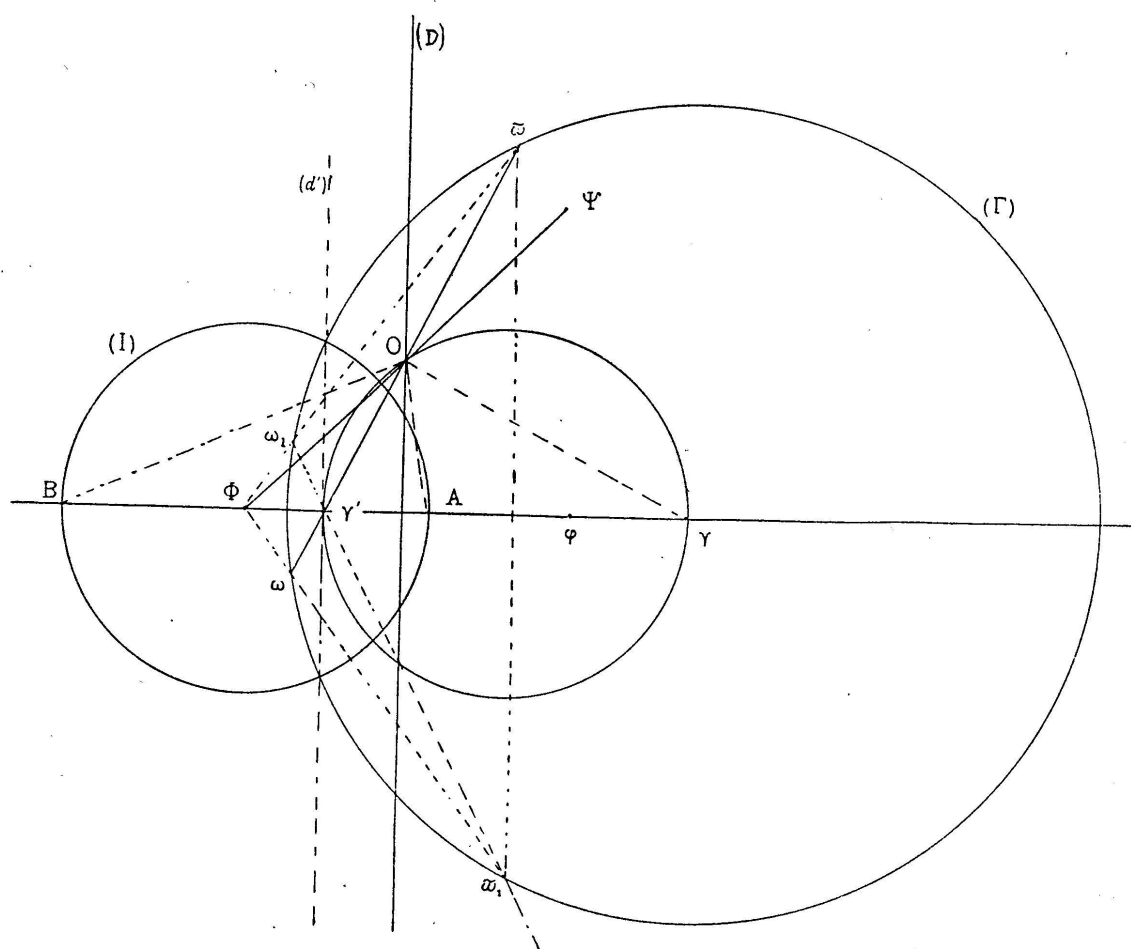


Fig. 2.

a) *Cas général.* — Supposons que (H) soit une hyperbole non décomposée, c'est-à-dire que Φ ne soit ni sur (D) ni sur (Δ); cela revient à dire que D ne passe pas par Φ , et que le segment \vec{D} n'est pas nul, en un mot que le moment du vecteur \vec{D} par rapport à Φ n'est pas nul (fig. 2).

Le symétrique ω_1 de ω par rapport à $\Phi\phi$ est sur $\Phi\bar{\omega}$ et l'on a $\Phi\omega_1.\Phi\bar{\omega} = R^2$. Le cercle (Γ) passant par $\omega\omega_1\bar{\omega}$ est donc orthogonal à (I); son centre γ est sur $\Phi\phi$ et sur la médiatrice de $\omega\bar{\omega}$.

Par ailleurs $\omega\bar{\omega}$ coupe $\Phi\phi$ en γ' qui est aussi sur $\omega_1\bar{\omega}_1$, symé-

trique de $\omega\varpi$ par rapport à $\Phi\phi$; donc la perpendiculaire (d') en γ' à $\Phi\phi$ est la polaire de Φ par rapport au cercle (Γ); comme les cercles (I) et (Γ) sont orthogonaux, (d') est leur sécante commune. Il en résulte que $\Phi\gamma \cdot \Phi\gamma' = R^2$; le cercle de diamètre $\gamma\gamma'$, qui passe par O, est orthogonal à (I); $O\gamma$ et $O\gamma'$ sont les bissectrices de OA et OB (puisque γ et γ' sont conjugués harmoniques par rapport à A et B). On en déduit la construction suivante:

\mathcal{C} étant définie par le cercle (I) et le vecteur \vec{D} , construire Ψ et O, puis les bissectrices de OA et OB, coupant la droite $\Phi\phi$ (perpendiculaire à D) en deux points: l'un extérieur au cercle (I), soit γ , et l'autre intérieur, soit γ' . Le cercle (Γ) de centre γ orthogonal à (I) coupe la droite $O\gamma'$ en ω et ϖ , toujours réels (car le rayon de (Γ) est $\geq \gamma\gamma' \geq \gamma O$), qui sont les points doubles cherchés.

b) *Cas particuliers.* — Ce sont ceux où le moment du vecteur \vec{D} par rapport au point Φ est nul. Alors l'hyperbole (H) se décompose. Cela se présente dans les cas suivants:

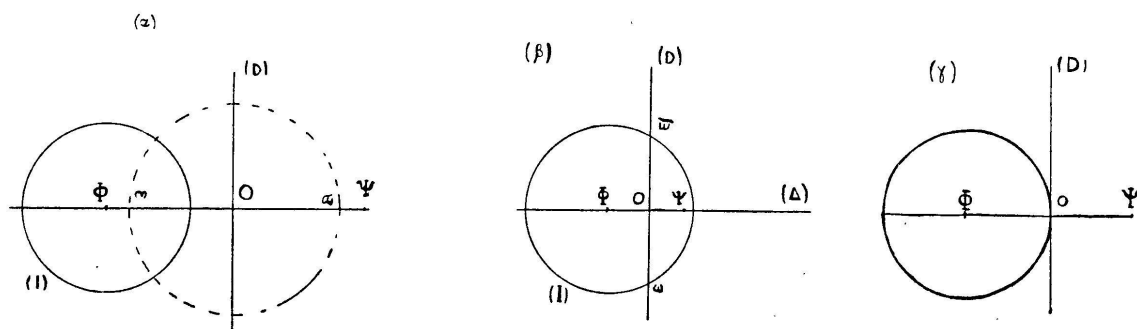


Fig. 3.

1° \vec{D} a une longueur nulle (fig. 3). — Le retournement se réduit à une symétrie autour de la droite (D) ou *renversement* R; $\mathcal{C} = \text{IR}$.

(α) (D) ne coupe pas le cercle (I). Il y a deux points doubles ω et ϖ , intersection de (Δ) et du cercle de centre O orthogonal à (I).

(β) (D) coupe le cercle (I); les points d'intersection ω et ϖ sont les points doubles cherchés.

(γ) (D) est tangente au cercle (I) en O. Ce point O est le seul

point double de la transformation. (Il convient de le compter pour deux).

2° \vec{D} a une longueur différente de zéro, mais son support (D) passe par Φ (fig. 4). — Le cercle de centre O, coupant (I) suivant un diamètre, coupe (D) en deux points ω et $\bar{\omega}$, qui sont doubles.

Dans tous les cas, on a donc deux points doubles réels distincts ou confondus, ω et $\bar{\omega}$, que nous appellerons les pôles de la transformation. Les segments $\Phi\Psi$ et $\omega\bar{\omega}$ ont même milieu O. Ce sont ces diagonales du parallélogramme de base $\omega\Phi\bar{\omega}\Psi$, dont la forme caractérise la transformation correspondante, comme nous allons le démontrer dans ce qui suit.

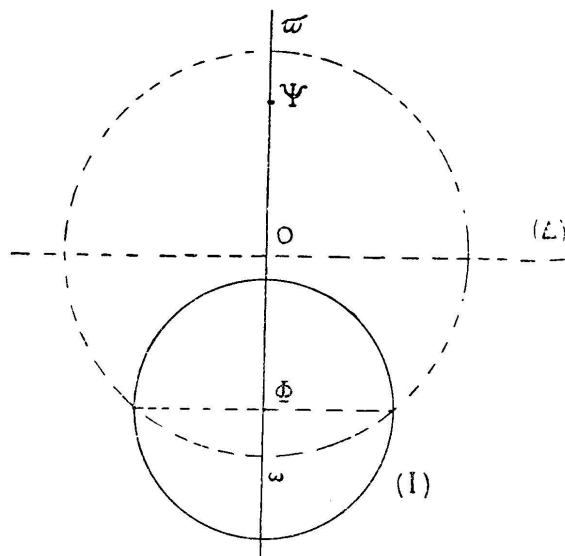


Fig. 4.

§ 6. — *Similitude image d'une transformation circulaire.* — L'existence de deux points doubles réels, distincts ou confondus, va nous permettre d'introduire la notion de similitude image de \mathcal{C} , conformément aux théorèmes suivants:

THÉORÈME VI. — *Etant donnée une transformation \mathcal{C} , on peut la transformer par une Γ convenable, en particulier par une inversion, en une similitude directe \mathcal{S} .*

Prenons en effet une transformation circulaire J quelconque assujettie simplement à avoir pour foyer-objet un pôle $\bar{\omega}$ de \mathcal{C} . La transformée de \mathcal{C} par J est $\mathcal{C}' = J^{-1}\mathcal{C}J$. On voit qu'elle admet ∞ comme point double, car $\infty \times J^{-1}\mathcal{C}J = \bar{\omega} \times \mathcal{C}J = \bar{\omega} \times J = \infty$; c'est donc une similitude.

THÉORÈME VII. — *Toutes les similitudes ainsi obtenues à partir d'une même \mathcal{C} sont semblables, c'est-à-dire ont même angle et même rapport.*

En effet, si $\mathcal{S} = J^{-1}\mathcal{C}J$ et $\mathcal{S}' = J'^{-1}\mathcal{C}J'$, on en déduit $\mathcal{S}' = J'^{-1}J\mathcal{S}J^{-1}J' = \sigma^{-1}\mathcal{S}\sigma$ en posant $\sigma = J^{-1}J'$, et l'on voit comme tout à l'heure que σ est une similitude.

THÉORÈME VIII (fondamental). — Quand \mathcal{C} subit une transformation du groupe Γ , la similitude S subit une similitude Σ , c'est-à-dire garde encore même angle et même rapport.

En effet, si $\mathcal{C}' = \Gamma^{-1} \mathcal{C} \Gamma$ avec $\mathcal{S} = J^{-1} \mathcal{C} J$ et $\mathcal{S}' = K^{-1} \mathcal{C}' K$, on a $\mathcal{S}' = K^{-1} \Gamma^{-1} \mathcal{C} \Gamma K = K^{-1} \Gamma^{-1} J \mathcal{S} J^{-1} \Gamma K = \Sigma^{-1} \mathcal{S} \Sigma$, en posant $\Sigma = J^{-1} \Gamma K$, et l'on voit encore que Σ est une similitude.

Donc le rapport k et l'angle α de la similitude directe \mathcal{S} sont des invariants de \mathcal{C} dans le groupe Γ . La similitude \mathcal{S} définie à une similitude près, sera dite l'image de \mathcal{C} . L'étude de ces images nous donnera les propriétés intrinsèques des transformations \mathcal{C} .

§ 7. — *Etude sommaire des différents types de transformations \mathcal{C} .* — Nous n'avons qu'à tirer ici les conséquences des théorèmes fondamentaux qui précèdent.

1° *Type général.* — Les pôles ω et ϖ sont distincts. L'image \mathcal{S} est une similitude de pôle ω_i , de rapport k et d'angle α . Pour la commodité, nous supposons qu'on l'a obtenue à l'aide d'une Γ directe.

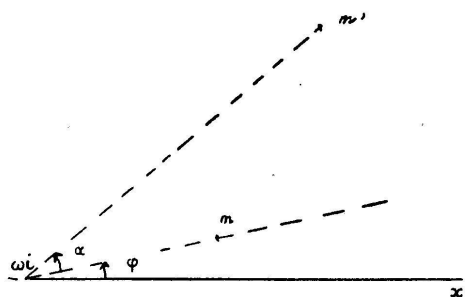


Fig. 5.

Prenons dans le plan-image (fig. 5) des coordonnées polaires ρ et φ , avec le pôle ω_i comme centre, et un axe $\omega_i x$ arbitraire. Les équations de \mathcal{S} sont

$$\rho' = k\rho, \quad \varphi' = \varphi + \alpha. \quad (5)$$

Dans le plan où opère \mathcal{C} , définissons chaque point M par un segment de cercle $\omega M \varpi$ capable de l'angle $(\overrightarrow{M\varpi}, \overrightarrow{M\omega}) = \sigma$, compris entre 0 et 2π , et par un cercle du faisceau orthogonal, défini par le paramètre positif $\frac{M\omega}{M\varpi} = \tau$.

Les quantités σ et τ sont les « coordonnées circulaires » de M par rapport aux pôles ω et ϖ . Elles sont liées aux coordonnées polaires ρ et φ de l'image m par des relations de la forme

$$\varphi = \sigma - \sigma_0, \quad \rho = a\tau. \quad (6)$$

En effet la première découle de ce que Γ conserve les angles :

$\varphi = (\omega_i x, \omega_i m)$ est égal à l'angle en ω , dans le plan primitif, du segment de cercle (σ_0) ayant pour image $\omega_i x$, avec le segment $\omega M\bar{\omega}$, angle qui est égal à $\sigma - \sigma_0$. La deuxième formule n'est autre que celle de la transformation des distances dans l'inversion composée de Γ , de foyer $\bar{\omega}$ et puissance r^2 :

$$\frac{\omega_i m}{\omega M} = \frac{r^2}{\bar{\omega}\omega \cdot \bar{\omega}M}$$

Or $\omega_i m = \rho$ et $\omega M = \tau \cdot \bar{\omega}M$; donc

$$\frac{\rho}{\tau \cdot \bar{\omega}M} = \frac{r^2}{\bar{\omega}\omega \cdot \bar{\omega}M'}$$

d'où

$$\rho = \frac{r^2}{\bar{\omega}\omega} \cdot \tau = a\tau,$$

en posant

$$a = \frac{r^2}{\bar{\omega}\omega}$$

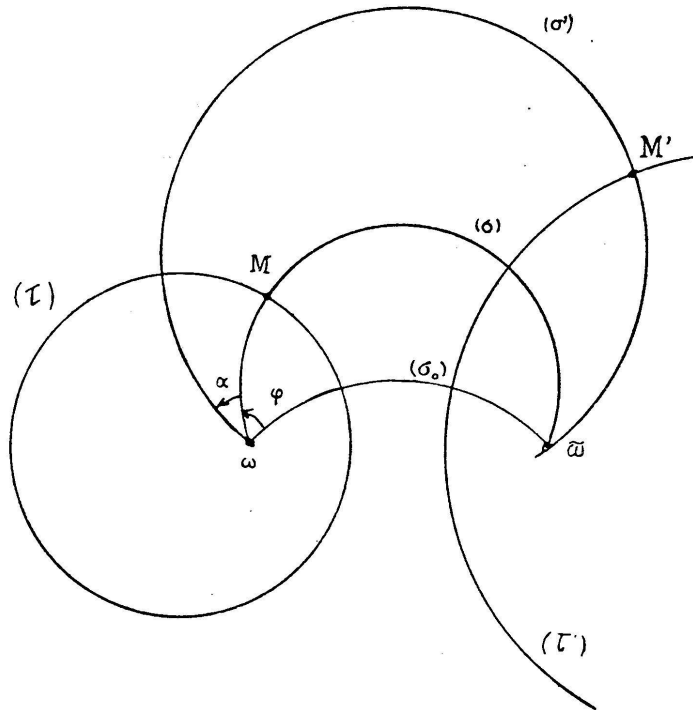


Fig. 6.

[On peut en particulier prendre pour Γ l'involution plane de foyer $\bar{\omega}$, axe $\bar{\omega}\omega$, puissance $r^2 = \bar{\omega}\omega^2$, qui conserve ω ; alors ω_i se confond avec ω , et $a = \bar{\omega}\omega$, $\rho = \bar{\omega}\omega \cdot \tau$.]

En portant dans (5) les valeurs (6) de φ et ρ , on a:

$$\tau' = k\tau, \quad \sigma' = \sigma + \alpha \quad (7)$$

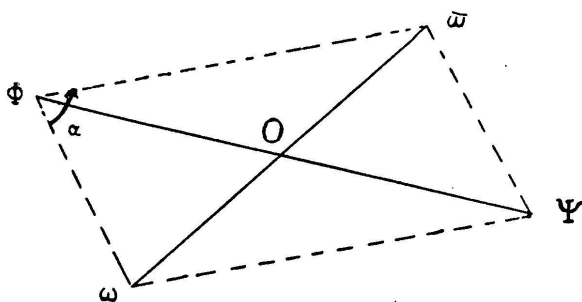


Fig. 7.

Ce sont les *équations intrinsèques* de \mathcal{C} , invariantes dans le groupe Γ .

Relation entre la similitude image et la figure focale (interprétation géométrique des invariants k et α) (fig. 7).

Appliquons les relations (7) aux points Φ et ∞ , c'est-à-dire écrivons que $\Phi.\mathcal{C} = \infty$. On a pour Φ :

$$\tau = \frac{\Phi\omega}{\Phi\bar{\omega}} \quad \sigma = (\overrightarrow{\Phi\bar{\omega}}, \overrightarrow{\Phi\omega})$$

et pour ∞ :

$$\tau' = 1 \quad \sigma' = 0$$

d'où

$$1 = k \cdot \frac{\Phi\omega}{\Phi\bar{\omega}}, \quad 0 = (\overrightarrow{\Phi\bar{\omega}}, \overrightarrow{\Phi\omega}) + \alpha, \quad (7')$$

ou

$$\boxed{k = \frac{\Phi\bar{\omega}}{\Phi\omega}, \quad \alpha = (\overrightarrow{\Phi\omega}, \overrightarrow{\Phi\bar{\omega}})} \quad (8)$$

La similitude \mathcal{S} est celle qui, avec le centre Φ , fait passer de ω à $\bar{\omega}$.

Dire que k et α sont invariants revient donc à dire que *la forme du parallélogramme de base de \mathcal{C} est invariante dans le groupe Γ .*

[\mathcal{C} étant donnée par son parallélogramme $\omega\bar{\omega}\Phi\Psi$, si l'on se donne ω' et $\bar{\omega}'$ transformés de ω et $\bar{\omega}$, cela suffit à déterminer \mathcal{C}' , car on construit immédiatement Φ' et Ψ' .]

Etudions les différents cas :

a) $k \neq 1$ et $\alpha \neq 0$; \mathcal{S} est une similitude quelconque (fig. 2). \mathcal{C} ne possède aucun cercle double, et n'est en aucun cas involutive. Si l'entier $p \rightarrow +\infty$, A étant un point donné, $A_p = A.\mathcal{C}^p$ tend vers ω si $k < 1$, et vers $\bar{\omega}$ si $k > 1$.

b) $k \neq 1$ et $\alpha = 0$; \mathcal{S} est une homothétie \mathcal{H} . Nous dirons que \mathcal{C} est du *type homothétie*, et nous la noterons \mathcal{C}_h . Ses équations intrinsèques sont

$$\tau' = k\tau, \quad \sigma' = \sigma. \quad (9)$$

Tous les cercles (σ) sont doubles. Si $p \rightarrow +\infty$, A_p tend vers ω ou $\bar{\omega}$ en restant sur le même cercle (σ).

Le parallélogramme de base est aplati. Ce cas correspond à la figure 3 (α) et à la figure 4.

c) $k = 1$ et $\alpha \neq 0$. \mathcal{S} est une rotation \mathcal{R} .

Nous dirons que \mathcal{C} est du type rotation, et nous la noterons \mathcal{C}_r . Les équations intrinsèques sont

$$\tau' = \tau, \quad \sigma' = \sigma + \alpha. \quad (10)$$

Les cercles (τ) sont doubles; le parallélogramme de base est un losange (fig. 3 (β)).

Le point A ayant les coordonnées σ et τ , le point $A_p = A$. \mathcal{C}^p a les coordonnées $\sigma + p\alpha$ et τ . \mathcal{C}_r est involutive d'ordre p si $\alpha = \frac{2\pi}{p}$.

En particulier \mathcal{C} est réciproque si $\alpha = \pi$. Alors Φ et Ψ se confondent avec O; le losange est aplati (fig. 8). L'image est une

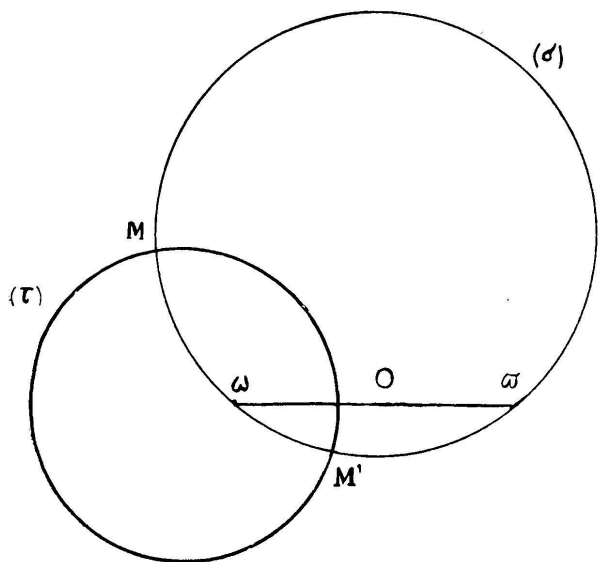


Fig. 8.

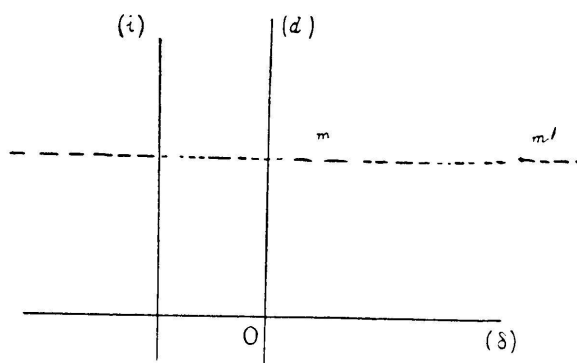


Fig. 9.

symétrie autour de ω . La transformation est l'involution plane \mathcal{J} , dont les équations intrinsèques sont:

$$\tau' = \tau, \quad \sigma' = \sigma + \pi. \quad (11)$$

Les cercles (τ) sont toujours conservés; les cercles (σ) le sont aussi; mais alors que les « cycles » ou cercles orientés (τ) le sont également, les cycles (σ) ne le sont pas: sur un cercle (σ) , les deux segments limités par ω et $\bar{\omega}$ sont échangés dans la transformation. Deux points conjugués M et M' sont les points communs à un cercle (σ) et à un cercle (τ) . Les points $\omega\bar{\omega}MM'$ forment un quadrilatère harmonique.

Autres cas simples: $p = 3$ donne l'involution plane ternaire définie par $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ (losange de base formé de deux triangles équilatéraux). $p = 4$ donne l'involution plane quaternaire: $\alpha = \frac{\pi}{2}$; losange de base devenu un carré. Etc...

2° *Type translation* (fig. 10). — C'est le cas où ω et ϖ sont confondus, c'est-à-dire où \mathcal{C} est le produit d'une inversion par

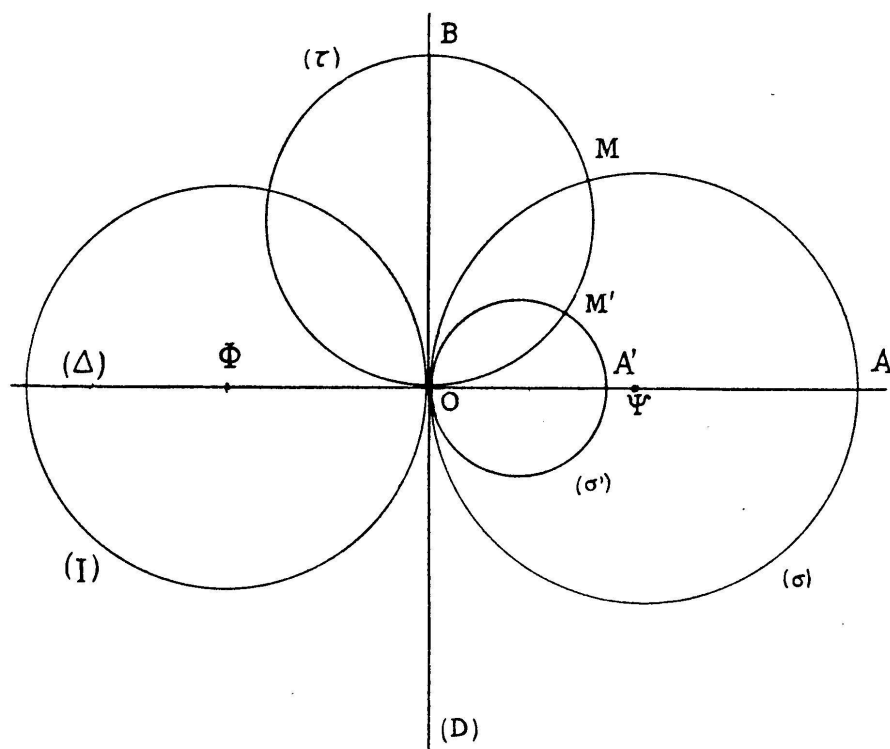


Fig. 10.

une symétrie autour d'une droite D tangente au cercle d'inversion (I) au point O. Ce point O est le seul point double (Cf. § 5).

L'image \mathcal{L} de \mathcal{C}_l , obtenue par une Γ de foyer-objet O est le produit d'une symétrie autour d'une droite (i) parallèle à (d) par la symétrie autour de (d); c'est une translation de vecteur \vec{l} parallèle à (delta) (fig. 9). On en déduit que les cercles (tau) tangents à (Delta) en O sont conservés dans \mathcal{C}_l , ce que l'on pouvait remarquer *a priori*.

Un point M étant toujours défini par un cercle τ et un cercle σ , de diamètres respectifs \overline{OB} et \overline{OA} , les coordonnées cartésiennes x et y de son image m , par rapport à (delta) et (d), sont de la forme

$$x = \frac{r^2}{OA}, \quad y = \frac{r^2}{OB}, \quad (12)$$

et les équations de \mathcal{C}_l sont

$$x' = x + a, \quad y' = y \tag{13}$$

($a = \frac{r^2}{\Phi O}$ n'est pas un invariant).

Conclusion. — Tous les cas possibles ont été examinés. Retenons que toute transformation circulaire directe est la transformée d'une similitude directe par une inversion.

Ce théorème n'est pas vrai dans l'espace pour les transformations sphériques. Le théorème analogue pour les transformations inverses est vrai dans l'espace, mais non dans le plan.

CHAPITRE III. — LES TRANSFORMATIONS CIRCULAIRES INVERSES.

§ 8. — On a vu (§ 3) qu'elles sont de la forme $C = I\mathcal{O}$.

Nous allons les étudier d'une manière toute semblable à la précédente, mais les résultats seront essentiellement différents.

Généralités. — Dans le cas le plus général, le déplacement \mathcal{O} est une rotation (fig. 11), d'un angle θ autour d'un point O ;

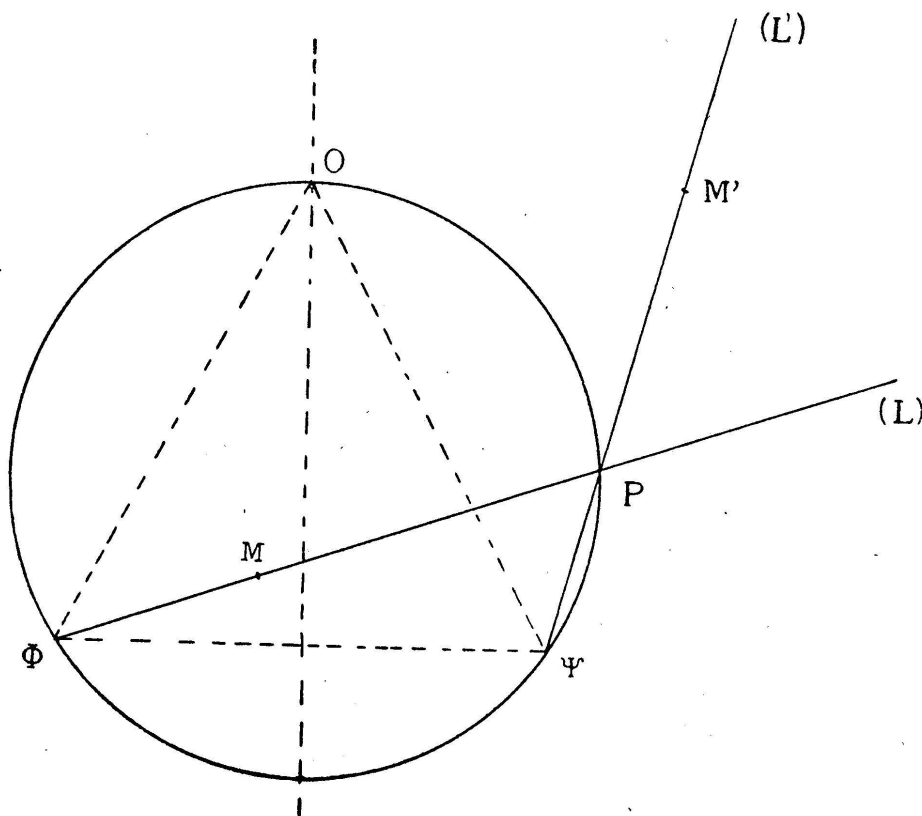


Fig. 11.

une droite (L) passant par le foyer objet Φ devient une droite (L') passant par Ψ coupant (L) en un point P, qui, lorsque (L) tourne autour de Φ , décrit le cercle (C) passant par O, Φ , Ψ . La transformation C est définie si l'on se donne le cercle (C), les points Φ et Ψ sur ce cercle, et le rayon R du cercle (I) de centre Φ : on peut en effet construire alors l'homologue M' de M, qui se trouve sur (L'), et vérifie la relation $\Phi M \cdot \Psi M' = R^2$.

On vérifie que C dépend de six paramètres.

Le déplacement \mathcal{O} peut en second lieu se réduire à une translation \mathcal{L} , définie par le vecteur $\vec{\mathcal{L}}$; on a alors $\overrightarrow{\Phi\Psi} = \vec{\mathcal{L}}$; la droite (L') est parallèle à (L), et l'on a toujours $\overrightarrow{\Phi M} \cdot \overrightarrow{\Psi M'} = R^2$.

Enfin le déplacement \mathcal{O} peut se réduire à la transformation identique. C se réduit alors à une simple inversion (I).

Les trois catégories ci-dessus correspondent aux C proprement dites; pour avoir toutes les transformations circulaires inverses, il convient d'y ajouter les similitudes inverses: proprement dites S, retournements D, symétries R.

§ 9. — THÉORÈME IX. — *La transformation C, si elle ne se réduit pas à une inversion, admet soit deux points doubles réels, soit un couple de points conjugués réels.* (Rappelons que si C se réduit à une inversion, elle admet un cercle de points doubles, et tous les points du plan sont deux à deux conjugués, puisque la transformation est réciproque.)

Démonstration: 1° *Cas général.* $C = I\mathcal{R}$. — Cherchons d'abord les points doubles. Si ω est point double de C, il est sur le cercle (C) et l'on a $\Phi\omega \cdot \Psi\omega = R^2$. Le symétrique ω de ω par rapport à la médiatrice (D) de $\Phi\Psi$ est aussi un point double (fig. 12). Si ω_1 est l'inverse de ω dans l'inversion (I), le cercle passant par ω , ω_1 , et ω , est orthogonal à (I) et a pour centre le point O: en effet, son centre doit être sur la médiatrice (D) de $\Phi\Psi$ et sur la bissectrice de $\Phi\omega$ et $\Phi\omega$ puisque $\Phi\omega_1 = \Phi\omega$. D'où la construction: mener le cercle de centre O orthogonal au cercle (I); il coupe le cercle (C) en ω et ω qui sont les points doubles cherchés. Plusieurs cas sont à distinguer:

- a) O est extérieur à (I) ; deux points doubles réels;
- b) O est sur (I) ; deux points doubles confondus avec O ;
- c) O est intérieur à (I) ; pas de points doubles réels.

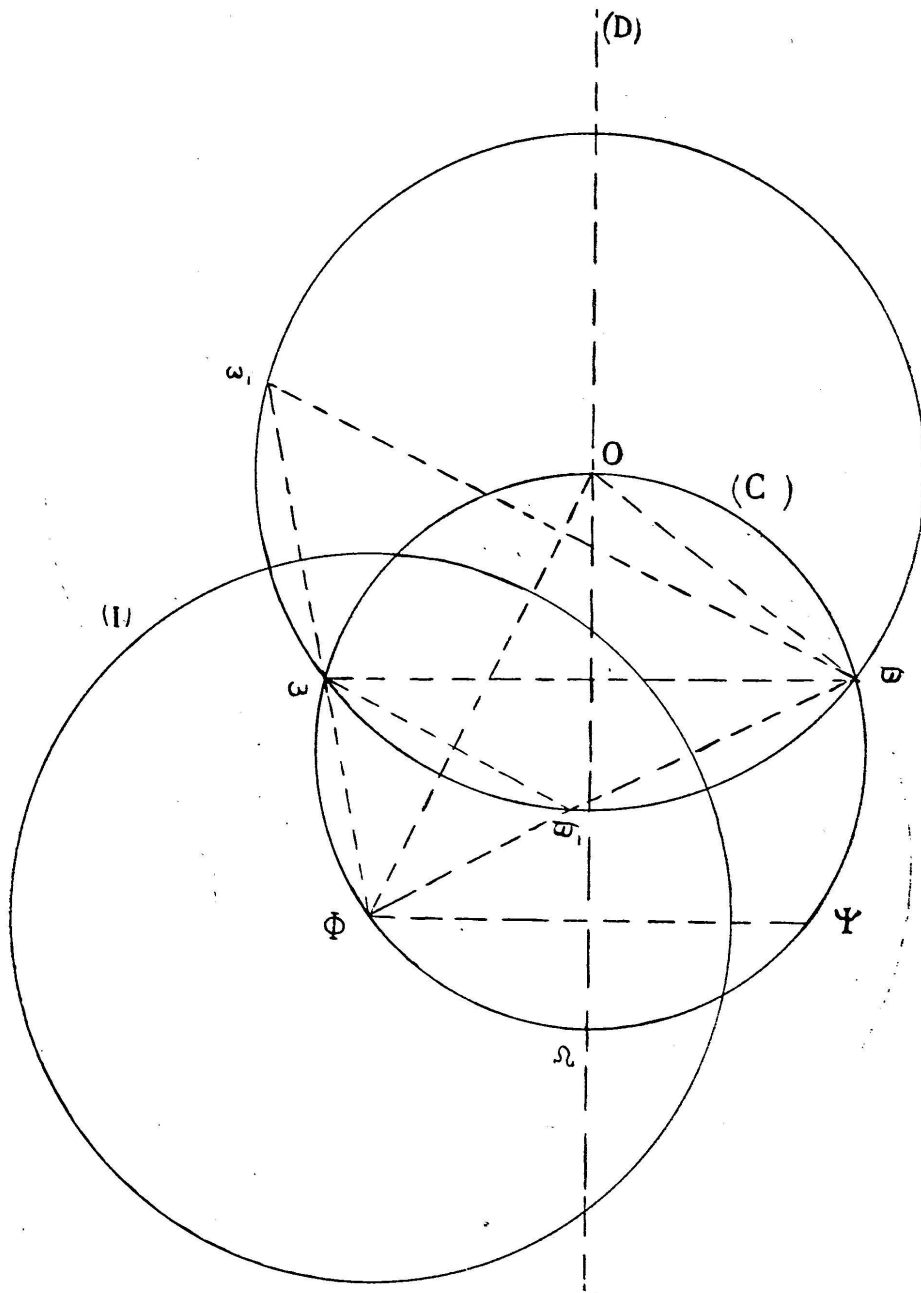


Fig. 12.

Cherchons maintenant s'il y a des couples de points ω , $\bar{\omega}$ conjugués, c'est-à-dire tels que $\bar{\omega}$ soit le transformé de ω , et ω celui de $\bar{\omega}$.

Si ω , $\bar{\omega}$ est un tel couple, les droites $\Phi\omega$ et $\Psi\bar{\omega}$ se coupent en un point M du cercle (C) ; de même $\Phi\bar{\omega}$ et $\Psi\omega$ se coupent en un autre point N de ce cercle; cela entraîne que les bissectrices des angles en ω et $\bar{\omega}$ sont parallèles, puisque les triangles $\omega\Phi N$ et

$\omega\Psi M$ d'une part, $\varpi\Phi M$ et $\varpi\Psi N$ d'autre part, sont inversement semblables.

En second lieu on a $\Phi\omega.\Psi\varpi = R^2$ et $\Phi\varpi.\Psi\omega = R^2$, d'où

$$\frac{\Phi\omega}{\Phi\varpi} \times \frac{\Psi\varpi}{\Psi\omega} = 1, \quad \text{ou} \quad \frac{\omega\Phi}{\omega\Psi} = \frac{\varpi\Phi}{\varpi\Psi}.$$

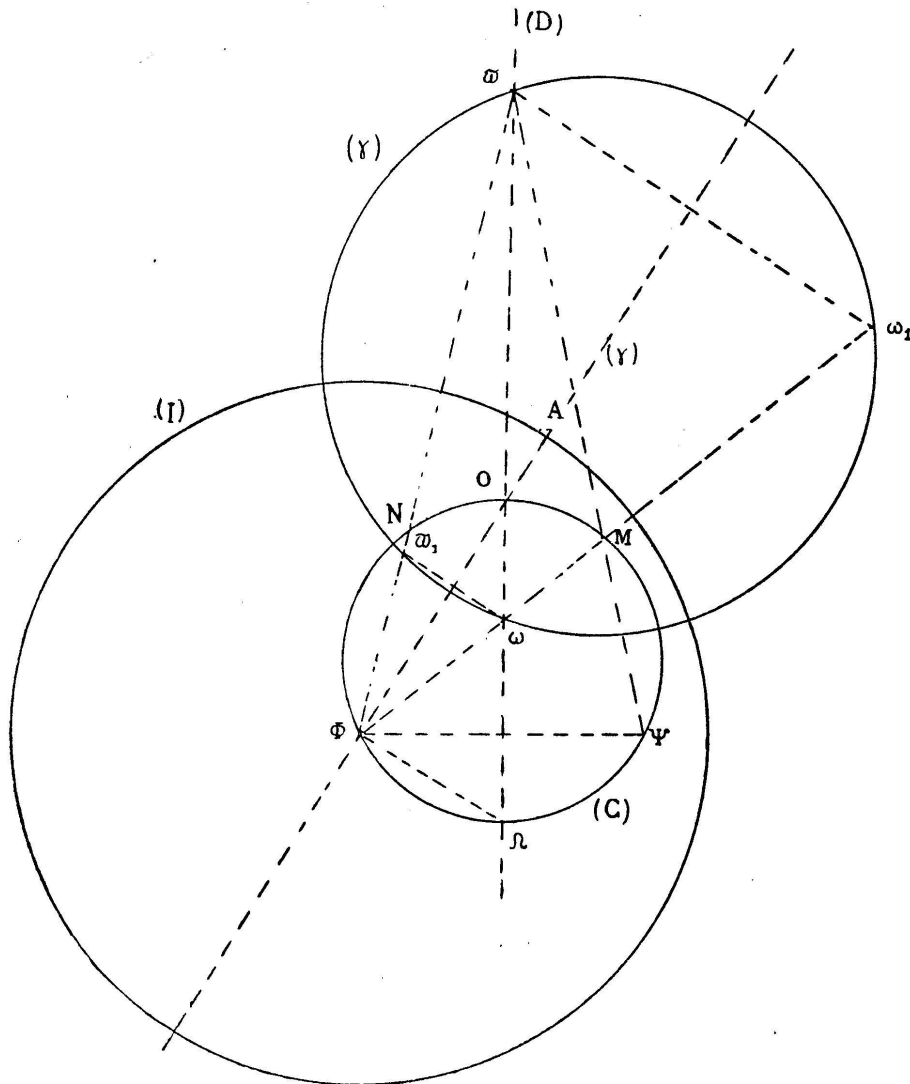


Fig. 13.

Il en résulte que les bissectrices dont on vient de parler coupent la droite $\Phi\Psi$ en un même point H, et sont par suite confondues. Donc ω , ϖ , H sont alignés; comme ils doivent être sur un même cercle du faisceau ayant Φ et Ψ pour points limites, cette droite est nécessairement (D). ω et ϖ sont donc sur (D), M et N sont symétriques par rapport à (D) (fig. 13). Par suite ΦO et $\Phi\Omega$ sont les bissectrices de $\Phi\omega$ et $\Phi\varpi$. Il en résulte que si ω_1 est l'inverse de ω , ϖ_1 celui de ϖ , dans l'inversion de cercle (I),

le cercle (γ) passant par $\omega\omega_1\varpi\varpi_1$, orthogonal à (I), et ayant son centre sur ΦO , est en outre orthogonal au cercle (C).

Donc

$$\overline{\gamma O} \cdot \overline{\gamma \Phi} = \rho^2 = \overline{\gamma A} \cdot \overline{\gamma B} = \overline{\gamma \Phi}^2 - R^2.$$

D'où

$$\overline{\Phi O} \cdot \overline{\Phi \gamma} = (\overline{\Phi \gamma} + \overline{\gamma O}) \overline{\Phi \gamma} = \overline{\Phi \gamma}^2 - [\overline{\gamma \Phi}^2 - R^2] = R^2. \quad (14)$$

γ est l'inverse de O par rapport au cercle (I). D'où la construction: par γ , inverse de O, mener le cercle (γ) orthogonal à (I), qui coupe (D) en ω et ϖ . Ces deux points sont conjugués dans la transformation C. Les cas à distinguer sont les mêmes que dans l'étude des points doubles ci-dessus:

- a) O extérieur à (I): pas de points conjugués;
- b) O sur le cercle (I): par convention, deux points conjugués confondus avec le point O;
- c) O intérieur à (I): un couple de points conjugués ω et ϖ .

Le théorème annoncé est donc démontré dans le cas de la rotation.

2° *Cas de la translation* $C = I\mathcal{L}$. — Le cercle de centre O, milieu de $\Phi\Psi$, coupant (I) diamétralement, coupe cette droite $\Phi\Psi$ en deux points ω et ϖ qui sont points doubles de C. Ces deux points sont toujours réels (fig. 14).

Le théorème IX est aussi complètement démontré.

Les points ω et ϖ , qu'ils soient points doubles ou points conjugués, seront dits les *pôles* de la transformation C.

La figure formée par les deux foyers et les deux pôles admet dans tous les cas l'axe de symétrie (D).

Nous sommes donc amenés à distinguer trois espèces de transformations circulaires inverses C, d'après la nature de leurs pôles (qui est un caractère intrinsèque):

- a) Celles de la forme $C = I\mathcal{O}$, où \mathcal{O} est soit une translation, soit une rotation autour d'un point O extérieur au cercle (I). Elles ont deux points doubles réels et pas de points conjugués réels; nous les appellerons « transformations circulaires inverses à pôles doubles », et les désignerons par le symbole C_h pour une raison qui apparaîtra dans la suite;

b) Celles de la forme $C = I\mathcal{O}$, où \mathcal{O} est une rotation autour d'un point O situé sur le cercle I . Ce sont les « C à pôles confondus », désignées par C_l ;

c) Celles où \mathcal{O} est une rotation autour d'un point O intérieur au cercle (I). Ce sont les « C à pôles conjugués » ou C_r . Ici, pas de points doubles réels, mais deux points conjugués réels.

Les inversions I , correspondant à \mathcal{O} réduit à la transformation identique, constituent un cas particulier commun aux trois espèces précédentes.

Remarquons en outre, dès à présent, que les similitudes inverses S rentrent dans les C_h , les retournements D dans les C_l , la symétrie R dans les I .

§ 10. — *Similitude inverse, ou antirotation, image d'une transformation circulaire inverse C .*

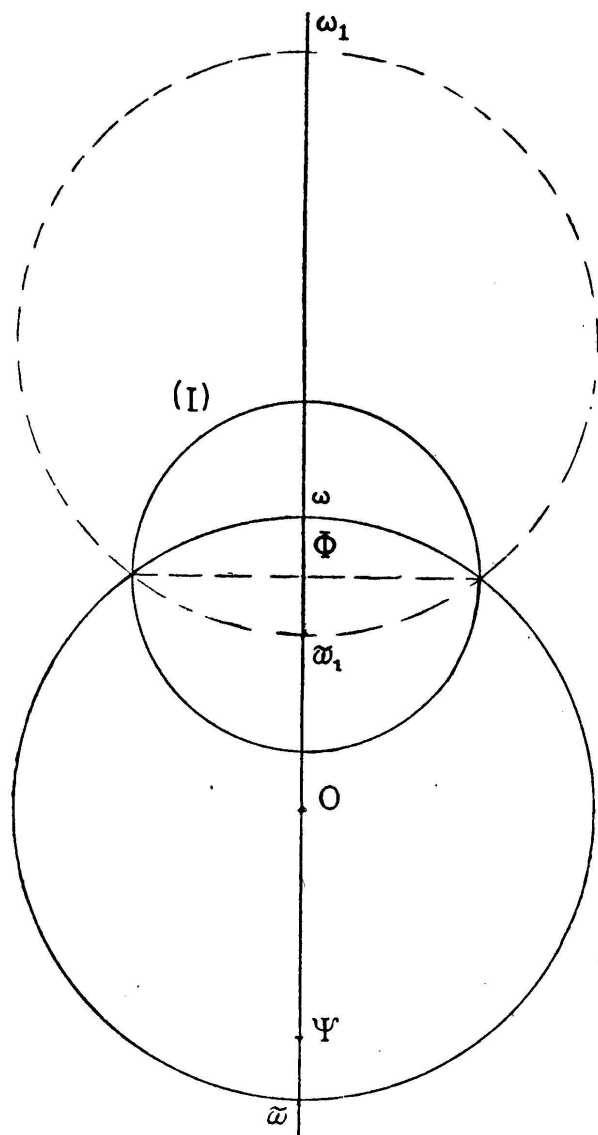


Fig. 14.

THÉORÈME X. — *Toute transformation de première espèce C_h peut être transformée en une similitude inverse S par une transformation Γ convenable, pour laquelle on peut prendre en particulier une simple inversion (cf. théorème VI).*

Il suffit, en effet, de prendre une Γ ayant pour foyer-objet l'un des pôles ω et $\bar{\omega}$.

THÉORÈME XI. — *Toutes les S ainsi obtenues sont semblables entre elles, et ont par suite le même rapport k (cf. théorème VII).*

THÉORÈME XII. — *Toute transformation de deuxième espèce C_l peut être transformée en un retournement D par une Γ convenable.*

Il suffit, en effet, de prendre une Γ ayant pour foyer-objet le pôle unique O de C_l .

Définition. — Nous appellerons *antirotation* le produit d'une inversion par une rotation quelconque autour du centre d'inversion. Les antirotations jouent, comme on va le voir, un rôle symétrique de celui des similitudes inverses.

THÉORÈME XIII. — *Toute transformation de troisième espèce C_r peut être transformée en une antirotation T par une Γ convenable.*

Il suffit encore de prendre une Γ ayant pour foyer-objet l'un des pôles conjugués, soit ω . C_r devient C'_r dans laquelle ω' et ∞ sont conjugués; donc les deux foyers Φ' et Ψ' de C_r sont confondus avec ω' . C'_r étant d'ailleurs de la forme $I'Q'$, le déplacement Q' ne peut être qu'une rotation autour de Φ' . Donc C'_r est une antirotation T .

THÉORÈME XIV. — *Toutes les antirotations ainsi obtenues à partir d'une même C_r sont semblables, et ont par suite le même angle α .*

Remarquons en outre qu'une inversion I peut, si l'on veut, être transformée en une symétrie ou renversement R autour d'une droite.

THÉORÈME XV (fondamental). — *Quand C subit une transformation du groupe Γ , son image S ou T subit une similitude Σ .*

Démonstration tout analogue aux précédentes. Nous la refaisons, eu égard à l'importance du résultat; prenons par exemple le cas d'une C de troisième espèce, ayant pour image une antirotation T . On a:

$$C' = \Gamma^{-1} C \Gamma, \quad T = J^{-1} C J, \quad T' = K^{-1} C' K,$$

d'où l'on déduit

$$T' = K^{-1} \Gamma^{-1} J \cdot T \cdot J^{-1} \Gamma K = \Sigma^{-1} \Gamma \Sigma$$

en posant

$$\Sigma = J^{-1} \Gamma K.$$

On voit que Σ est une similitude, car

$$\infty \times J^{-1} \Gamma K = \varpi \Gamma K = \varpi' K = \infty .$$

Σ est directe ou inverse, suivant que Γ est elle-même directe ou inverse.

Donc le rapport k de la similitude image, ou l'angle α de l'antirotation image, constitue l'invariant de C dans le groupe Γ . Une C n'a donc qu'un invariant, alors qu'une \mathcal{C} en avait deux.

Les résultats essentiels qui précèdent vont nous donner les propriétés intrinsèques des C des diverses espèces.

§ 11. — *Etude sommaire des différents types de transformations circulaires inverses.*

Première espèce: Transformations à pôles doubles C_h . — On a $C_h = I\mathcal{O}$, \mathcal{O} étant une translation ou une rotation autour d'un centre O extérieur au cercle d'inversion (I) . Pour la commodité, faisons, comme pour les \mathcal{C} , l'image de C avec une Γ directe, de foyer-objet ϖ , ϖ étant le pôle situé du côté de Ψ' sur le cercle (C) . Prenons ici encore des coordonnées polaires ρ , φ dans le plan-image, avec pour axe origine des angles l'axe ωx de la similitude inverse S . Prenons également dans le plan primitif les coordonnées circulaires σ et τ définies au § 7. On a encore les relations:

$$\varphi = \sigma - \sigma_0, \quad \rho = a\tau. \quad (6)$$

Les équations de S s'écrivent:

$$\varphi' + \varphi = 0, \quad \rho' = k\rho, \quad (15)$$

d'où

$$\sigma + \sigma' = 2\sigma_0, \quad \tau' = k\tau. \quad (16)$$

k est un invariant (théorème XV), mais σ_0 n'en est pas un.

Appliquons comme précédemment les équations (16) au point Φ , de coordonnées

$$\sigma = (\overrightarrow{\Phi\varpi}, \overrightarrow{\Phi\omega}), \quad \tau = \frac{\Phi\omega}{\Phi\varpi},$$

dont le transformé est ∞ , de coordonnées $\sigma' = 0$, $\tau' = 1$. On a encore $k = \frac{\Phi\varpi}{\Phi\omega}$ et en outre $2\sigma_0 = (\overrightarrow{\Phi\varpi}, \overrightarrow{\Phi\omega})$ ou $\sigma_0 = (\overrightarrow{\Phi\varpi}, \overrightarrow{\Phi O})$.

La conclusion est analogue à celle du § 9. La similitude image S est celle qui fait passer de ω à ϖ , lorsqu'on l'applique au centre Φ , avec l'axe ΦO (cf. fig. 12).

Mais ici la forme de la figure focale, c'est-à-dire du trapèze $\omega\varpi\Phi\Psi'$, n'est pas invariante; seul le rapport $\frac{\Phi\varpi}{\Phi\omega} = k$ est invariant. Il en résulte que si l'on transforme C par une Γ , pour déterminer C' , il ne suffit pas de donner ω' et ϖ' ; il faut encore donner l'homologue d'un cercle (σ) donné, ceci afin de déterminer σ_0 . En outre, on peut, si l'on veut, par une Γ convenable, donner au trapèze de base une forme quelconque assujettie seulement à vérifier $\frac{\Phi\varpi}{\Phi\omega} = k$. Par exemple on pourrait le réduire à la forme aplatie pour étudier plus facilement les propriétés intrinsèques de C ; mais cela n'a pas d'intérêt. Cette forme aplatie correspond au cas où \mathcal{O} , dans $C = I\mathcal{O}$, est une translation (on vérifie ainsi que ce cas n'est pas intrinséquement distinct du cas de la rotation).

Revenons à l'étude de C_h par sa similitude image: les cercles (σ) sont *deux à deux conjugués*, et deux d'entre eux sont doubles: le premier est celui qui correspond à $\omega_i x$, le second à $\omega_i y$. Le premier est défini par $\varphi = 0$, $\sigma = \sigma_0$; c'est le cercle (Ω) dont le centre est le point Ω , autre que O , où (D) coupe le cercle (C). Le second est le cercle (Γ) orthogonal à celui-là: il a pour centre le point O . Sur le premier, les segments limités par ω et ϖ sont conservés; sur le second ils sont échangés. On aurait pu trouver directement ces deux cercles: (Γ) est orthogonal au cercle (I), (Ω) coupe (I) diamétralement.

Quant aux cercles (τ), ils sont transformés comme dans une \mathcal{S} de pôles ω et ϖ , et de rapport k , d'après la formule $\tau' = k\tau$.

Si $k \neq 1$, C_h ne peut être involutive: $A_p \rightarrow \omega$, si $k < 1$, vers ϖ si $k > 1$. Si $k = 1$, S se réduit à une symétrie R , et C_h à une inversion I ; c'est le cas où l'angle de rotation θ est nul.

Deuxième espèce: Transformations C_t à pôles confondus. — $C_t = I\mathcal{R}$, \mathcal{R} étant une rotation d'un angle θ autour d'un point O situé sur le cercle d'inversion (I).

Prenons son image avec une Γ de foyer-objet O ; on obtient un retournement R , produit d'une symétrie (i) par la rotation θ

autour de o . R devant amener φ en o , et o en ψ , l'axe de retournement passe par les milieux φ' de φO et ψ' de $O\psi$; le vecteur de retournement est $\overrightarrow{\varphi'\psi'}$ (fig. 15).

Avec les notations habituelles, on a

$$x = \frac{r^2}{OA}, \quad y = \frac{r^2}{OB}$$

et pour les équations de C_l :

$$x' = x + a, \quad y' + y = 2b.$$

Les cercles (σ) sont deux à deux conjugués avec un cercle double (Ω). Les cercles (τ) se transforment comme dans une C_l d'après la formule $x' = x + a$ (fig. 16).

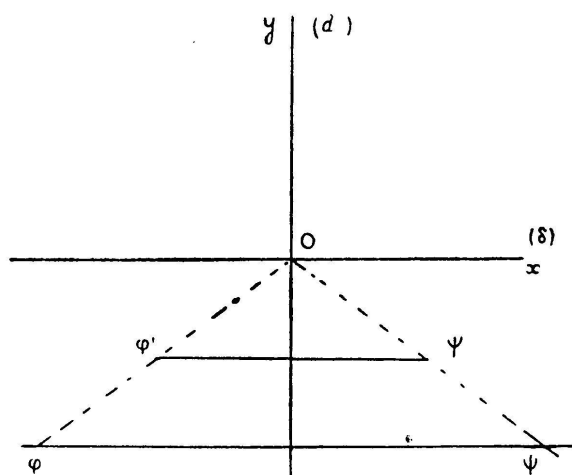


Fig. 15.

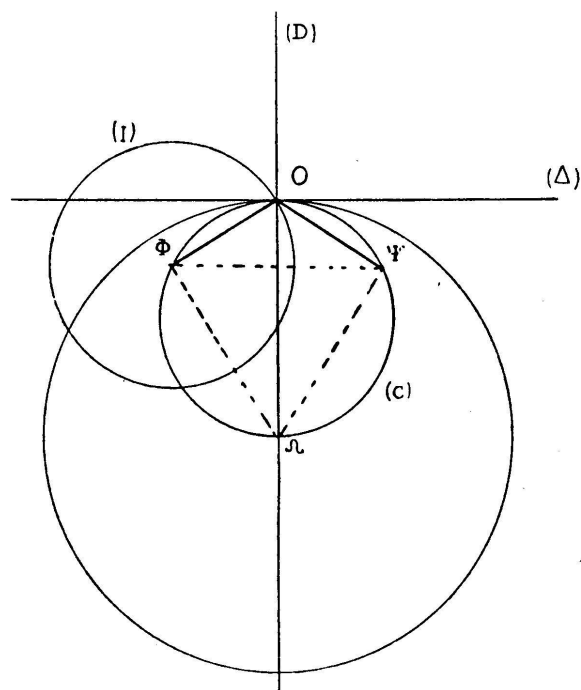


Fig. 16.

Troisième espèce: Transformations C_r à pôles conjugués. — Elles sont de la forme $C_r = I\mathcal{R}$ où \mathcal{R} est une rotation autour d'un centre O intérieur au cercle (I). L'image est une antirotation T . Avec les mêmes notations que précédemment, les équations de T sont

$$pp' = p_1^2, \quad \varphi' = \varphi + \alpha, \quad (17)$$

d'où celles de C_r

$$\tau\tau' = t^2, \quad \sigma' = \sigma + \alpha, \quad (18)$$

en posant $t = \frac{\rho_1}{\alpha}$.

α est invariant, mais non t^2 . En appliquant toujours au point Φ les formules (18) on a

$$\frac{\Phi\omega}{\Phi\bar{\omega}} = t^2, \quad O = (\overrightarrow{\Phi\bar{\omega}}, \overrightarrow{\Phi\omega}) + \alpha,$$

ou

$$t^2 = \frac{\Phi\omega}{\Phi\bar{\omega}}, \quad \alpha = (\overrightarrow{\Phi\omega}, \overrightarrow{\Phi\bar{\omega}}).$$

L'antirotation T fait encore passer de ω à $\bar{\omega}$ si on l'applique au centre Φ , avec un cercle convenable, qui n'est autre que le cercle d'inversion (I) (fig. 13). La transformée de C par Γ sera connue si l'on se donne ω' , $\bar{\omega}'$, et l'homologue d'un cercle (τ) donné; ce qui revient à se donner le foyer Φ' , par exemple, sur le cercle $\sigma = -\alpha$. La forme de la figure focale n'est pas invariante, puisque seul α l'est; on pourrait en particulier l'amener à un losange, cas qui correspond à une rotation composante autour de O , d'angle π .

Les cercles (τ) sont deux à deux conjugués, et il y a un cercle double, défini par $\tau = t$. C'est le cercle de centre Ω coupant (I) diamétralement. Quant aux cercles (σ) ils sont transformés, comme dans une C_r , d'après la formule $\sigma' = \sigma + \alpha$.

Comme T , C_r peut être involutive d'ordre $2p$ si 2α , angle de la rotation T^2 , est égal à $\frac{2\pi}{p} + 2m\pi$, c'est-à-dire si $\alpha = \frac{\pi}{p} + m\pi$.

Pour chaque valeur de p , on a donc deux transformations C_r qui sont involutives d'ordre p ; l'une est égale à l'autre suivie d'une rotation de π (ou symétrie par rapport à un point) sur l'image, c'est-à-dire au produit de l'autre par une involution plane de pôles ω et $\bar{\omega}$, dans le plan primitif. Ce seront les deux « antiinvolutions d'ordre p », C_p et $C_{p'}$; on aura :

$$C_{p'} = C_p \mathcal{J}, \quad \text{ou} \quad C_p = C_{p'} \mathcal{J}.$$

Pour $p = 1$ on obtient les deux C réciproques, correspondant à $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$; la première n'est autre que l'inversion

simple I, la seconde l'inversion de puissance négative. (Dans le cours de cette étude, le mot « inversion » désigne toujours l'inversion de puissance positive.)

Pour $p = 2$, on obtient les deux antiinvolutions quaternaires :

$$C_2\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad C_2\left(\alpha = \frac{3\pi}{2}\right) . \quad \text{Etc. ...}$$

Remarque. Il était clair *a priori* qu'une C ne pouvait être involutive d'ordre impair $2p + 1$, car $C^{2p+1} = C^p.C$ est une transformation inverse C' , qui ne se réduit jamais à la transformation identique.

CHAPITRE IV. — APPLICATION À LA DÉCOMPOSITION DES DIVERSES TRANSFORMATIONS Γ .

§ 12. — *Groupe des transformations Γ ayant les mêmes pôles.* — On a vu qu'il était possible de transformer une Γ isolée en une image \mathcal{S} , S , ou T , c'est-à-dire en une autre Γ ayant un pôle à l'infini. Une pareille opération est évidemment impossible pour le groupe Γ lui-même, c'est-à-dire pour toutes les Γ du plan prises simultanément. Mais elle est possible pour le groupe partiel des Γ ayant un pôle déterminé. Prenons ici un groupe encore plus restreint : celui des Γ ayant en commun leurs deux pôles ω et ϖ ; une Γ auxiliaire ayant ϖ pour foyer-objet transforme ce groupe partiel en celui des similitudes ayant ω pour pôle. Par suite :

Le produit de deux \mathcal{C} ayant les mêmes pôles ω et ϖ , de rapports k_1 et k_2 , d'angles α_1 et α_2 , respectivement, est une \mathcal{C} de mêmes pôles, de rapport $k_1 k_2$ et d'angle $\alpha_1 + \alpha_2$.

Toutes les transformations \mathcal{C} du groupe ainsi défini sont permutablement entre elles. Celles d'un même type (homothétie ou rotation) forment un sous-groupe.

Les \mathcal{C}_h et \mathcal{C}_r sont dites « transformations circulaires simples » parce qu'elles admettent un faisceau linéaire de cercles doubles ; chacune d'elles est caractérisée par un invariant k ou α . Une

C_l sera également dite « simple »; elle admet aussi un faisceau de cercles invariants. Cela posé,

THÉORÈME XVI. — *Toute \mathcal{C} autre qu'une \mathcal{C} simple peut être considérée comme le produit de deux \mathcal{C} simples d'espèces différentes et de mêmes pôles.*

Evident d'après ce qui précède.

Introduisons maintenant les transformations circulaires inverses:

Le produit de deux C_h de pôles ω et $\bar{\omega}$ est une \mathcal{C} de mêmes pôles. En particulier si les deux C_h ont les mêmes cercles doubles, leur produit est une \mathcal{C}_h . Plus particulièrement encore, *le carré d'une C_h est une \mathcal{C}_h .* Réciproquement, toute \mathcal{C} peut être considérée comme le produit de deux C_h , d'une infinité double de manières; toute \mathcal{C}_h comme le produit de deux C_h de mêmes cercles doubles, d'une infinité double de manières, ou comme le carré d'une C_h , d'une infinité simple de manières.

Le produit de deux C_r de pôles ω et $\bar{\omega}$ est une \mathcal{C} de mêmes pôles. Car le produit de deux T de même pôle ω est une \mathcal{S} .

Si les deux C_r ont même cercle double, leur produit est une \mathcal{C}_r . (Car le produit des deux T est alors une rotation.)

Le carré d'une C_r est une \mathcal{C}_r .

Réciproquement, toute \mathcal{C} peut être considérée comme le produit de deux C_r , d'une infinité double de manières; toute \mathcal{C}_r comme le produit de deux C_r de même cercle double, d'une infinité double de manières, ou comme le carré d'une C_r d'une infinité simple de manières.

THÉORÈME XVII. — *Le produit d'une C_h par une C_r de mêmes pôles ω et $\bar{\omega}$ est une involution plane \mathcal{J} .*

En effet ce produit est une \mathcal{C} où ω et $\bar{\omega}$ sont conjugués; or l'involution plane \mathcal{J} est la seule \mathcal{C} admettant des couples de points conjugués.

Vérification par les images: on peut écrire $S = \mathcal{J}C R_1$, $T = C R I$ ou encore $R_1 R' I$; d'où $ST = \mathcal{J}C R_1 R_1 R' I = \mathcal{J}C R' I = R' \mathcal{J} C I = R' I' = \mathcal{J}$. (Les R désignent, comme d'habitude, des renversements, c'est-à-dire des symétries autour d'une droite.) On aboutit encore aisément au résultat en raisonnant sur les

équations intrinsèques. Réciproquement, toute involution plane peut être considérée comme le produit d'une C_h par une C_r de mêmes pôles, et cela d'une infinité double de manières.

Le produit d'une C par une C_h de mêmes pôles est une C_h de mêmes pôles.

Le produit d'une C par une C_r de mêmes pôles est une C_r de mêmes pôles. Etc...

Réciproques analogues aux précédentes. En outre:

THÉORÈME XVIII. — *Toute C_h peut être considérée comme le produit d'une C_h par une inversion dont le cercle passe par les pôles de cette C_h , et cela d'une seule manière. Toute C_r peut être considérée comme le produit d'une C_r par une inversion échangeant les deux pôles de cette C_r et cela d'une seule manière.*

Si l'on appelle transformations *simples* les Γ admettant au moins un faisceau linéaire de cercles doubles, on voit que les C simples, conformément à une définition déjà donnée, sont les C_h , C_l et C_r ; au contraire, les C simples comprennent la seule inversion I , qui admet d'ailleurs un réseau linéaire de cercles doubles, c'est-à-dire une infinité de faisceaux linéaires. Cela posé, les résultats précédents se résument ainsi:

THÉORÈME XIX. — *Toute transformation Γ peut être considérée, et cela d'une manière unique, comme le produit de deux transformations simples « conjuguées », c'est-à-dire dont l'une conserve le couple des pôles de l'autre.*

Cette propriété tient au fond à ce que, dans les équations intrinsèques d'une Γ , les variables τ et σ sont séparées: une équation donne τ' en fonction de τ , l'autre σ' en fonction de σ , de sorte que Γ peut être considéré comme le produit d'une transformation sur les τ seuls, par une transformation sur les σ seuls, les cercles $\tau = c^{\text{te}}$ et $\sigma = c^{\text{te}}$ étant orthogonaux ¹.

Cas particulier. — *Groupe des transformations à pôles confondus en un même point O.*

Le produit de deux C_l de même pôle O est une C_l de pôle O. Le produit de deux C_r de même pôle O est une C_r ayant un de

¹ Si nous avons donné ici un certain nombre de résultats à peu près évidents, c'est en vue d'interprétations ultérieures intéressantes.

ses pôles en O ; si les deux C_l ont le même cercle double, c'est une \mathcal{C}_l de pôle O . Le carré d'une C_l est une \mathcal{C}_l de même pôle. Le produit d'une C_l par une \mathcal{C}_l de même pôle est une C_l de même pôle.

Réciproquement toute \mathcal{C}_l peut se décomposer en un produit de deux \mathcal{C}_l de même pôle, d'une double infinité de manières; toute C_l en un produit d'une \mathcal{C}_l par une C_l de même pôle, également d'une double infinité de manières; etc...

Ce sont des cas-limites des propriétés données plus haut concernant la décomposition d'une Γ quelconque en un produit de deux Γ « simples ».

§ 13. — *Groupe des Γ ayant un point double ω commun.* — Ce groupe a pour image le *groupe des similitudes du plan*. On déduit de là toutes ses propriétés, en particulier l'existence de divers sous-groupes.

Exemples: groupe des \mathcal{C}_r et \mathcal{C}_l admettant ω comme point double; groupe des \mathcal{C}_r , \mathcal{C}_l et C_l admettant ω comme pôle; etc...

On détaillerait facilement les différents cas particuliers.

§ 14. — *Etude du produit de n inversions successives.* — Le produit de n inversions successives est évidemment une transformation circulaire Γ . Elle sera directe si n est pair, inverse si n est impair. Pour $n = 1$, on retrouve ainsi la plus simple des C , qui est l'inversion simple I .

Cas de $n = 2$. — On a une \mathcal{C} , mais on n'a pas la \mathcal{C} la plus générale, bien que celle-ci dépende de six paramètres, et que chaque inversion dépende de trois paramètres. Effectivement:

THÉORÈME XX. — *Le produit de deux inversions est une \mathcal{C} simple, savoir une \mathcal{C}_n , une \mathcal{C}_l , ou une \mathcal{C}_r , suivant que les deux cercles d'inversion (I_1) et (I_2) ont leurs points communs imaginaires, confondus ou réels.*

Cherchons en effet la forme du parallélogramme de base de $\mathcal{C} = I_1 I_2$:

a) Si les cercles (I_1) et (I_2) sont *extérieurs* (fig. 17), soit O le point où leur axe radical (D) coupe la ligne des centres $I_1 I_2$. Le

cercle de centre O orthogonal à (I_1) et à (I_2) coupe la droite I_1I_2 en ω et ϖ ; on voit que I_1 transforme ω en ϖ , et I_2 ϖ en ω , de sorte que ω et ϖ sont les points doubles de \mathcal{C} . Par ailleurs le foyer objet Φ est l'inverse de I_2 par rapport à (I_1) ; de même Ψ

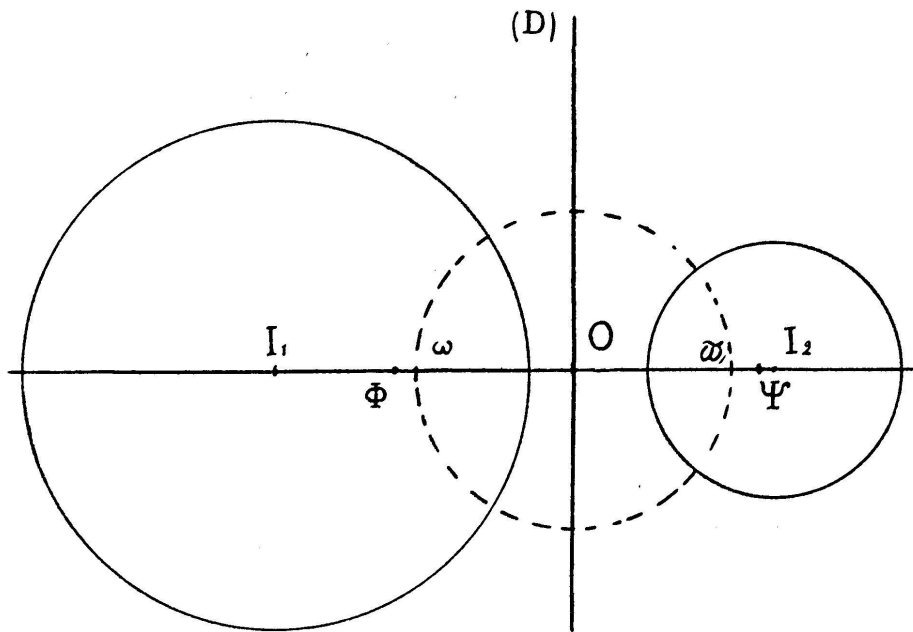


Fig. 17.

est l'inverse de I_1 par rapport à (I_2) . Le parallélogramme de base est donc aplati; \mathcal{C} est du type homothétie \mathcal{C}_h , avec un rapport $k = \frac{\Phi\varpi}{\Phi\omega}$. Si (I_1) et (I_2) ont les paramètres t_1 et t_2 par rapport aux pôles ω et ϖ , on a

$$\boxed{k = \frac{t_2^2}{t_1^2}} \quad (19)$$

Pour le voir, il suffit de prendre le plan-image, dans lequel les cercles (i_1) et (i_2) sont concentriques; les inversions I_1 et I_2 ont pour images les inversions (i_1) et (i_2) dont les équations sont respectivement:

$$\rho\rho_1 = r_1^2, \quad \rho_1\rho' = r_2^2,$$

ou encore

$$\tau\tau_1 = t_1^2, \quad \tau_1\tau' = t_2^2,$$

d'où

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{\tau'}{\tau} = \frac{t_2^2}{t_1^2},$$

car

$$\begin{aligned} \rho &= a\tau & \rho_1 &= a\tau_1 & \rho' &= a\tau' \\ r_1 &= at_1 & r_2 &= at_2 . \end{aligned}$$

On retrouve ainsi que I_1I_2 est du type homothétie, et on a la valeur annoncée de k .

b) Si les cercles (I_1) et (I_2) sont *tangents*, on a deux points doubles confondus avec le point de contact O . Cela caractérise le type translation \mathcal{C}_t . On retrouve ce résultat en prenant l'image (foyer objet O) car les deux inversions ont pour images des symétries autour de deux droites parallèles (fig. 18).

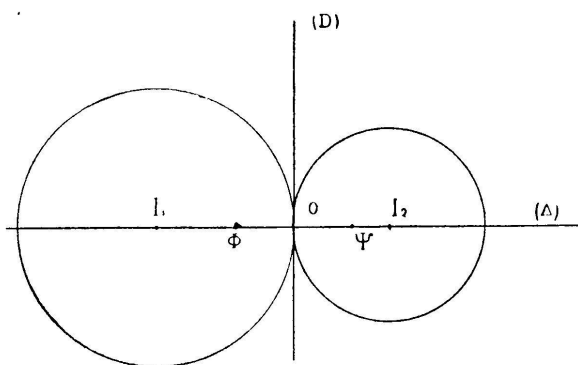


Fig. 18.

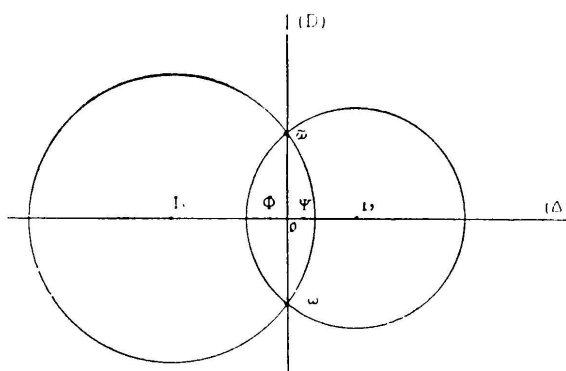


Fig. 19.

c) Les cercles (I_1) et (I_2) se coupent en ω et $\bar{\omega}$ (fig. 19). Ces deux points sont manifestement les points doubles de \mathcal{C} ; il en résulte que le parallélogramme de base est un losange; donc \mathcal{C} est du type rotation \mathcal{C}_r .

On retrouve ce résultat en prenant l'image, et on obtient ainsi la valeur de l'angle invariant $\alpha = (\overrightarrow{\Phi\omega}, \overrightarrow{\Phi\bar{\omega}})$, qui est égal au double de l'angle γ sous lequel se coupent les deux cercles.

$$\boxed{\alpha = 2\gamma} \quad \text{ou} \quad \boxed{\alpha = 2(\sigma_2 - \sigma_1)} \quad (20)$$

On voit que $\mathcal{C}_r = I_1 I_2$ peut être involutive d'ordre p , si $\alpha = \frac{2\pi}{p} + 2m\pi$ ou $\gamma = \frac{\pi}{p} + m\pi$, c'est-à-dire si les deux cercles d'inversion se coupent sous l'angle $\frac{\pi}{p}$.

En particulier \mathcal{C}_r est réciproque, c'est-à-dire est une involution plane, si les deux cercles d'inversion (I_1) et (I_2) sont orthogonaux.

d) Les cercles (I_1) et (I_2) sont intérieurs. Ce cas n'est pas distinct de celui des cercles extérieurs. On a encore $I_1 I_2 = \mathcal{C}_h$.

THÉORÈME XXI. — Réciproquement: Toute \mathcal{C} simple peut être considérée comme le produit de deux inversions, cela d'une infinité simple de manières.

Les formules (19) et (20) définissent les couples de cercles d'inversion correspondants. On remarque que le produit de deux inversions ne change pas si l'on remplace les cercles (I_1) et (I_2) par deux cercles (I'_1) et (I'_2) du même faisceau linéaire, tels que le rapport k ou l'angle α (suivant le cas) soit conservé, c'est-à-dire que

$$\frac{t'_2}{t'_1} = \frac{t_2}{t_1}$$

dans le cas d'une \mathcal{C}_h , $\sigma'_2 - \sigma'_1 = \sigma_2 - \sigma_1$, ou encore $\gamma' = \gamma$ dans le cas d'une \mathcal{C}_r .

Cas de $n = 3$. — On obtient la \mathcal{C} la plus générale d'après le théorème suivant:

THÉORÈME XXII. — Toute transformation \mathcal{C} peut être considérée comme le produit de trois inversions $I_1 I_2 J$, le cercle (J) étant orthogonal aux cercles (I_1) et (I_2), cela d'une infinité simple de manières.

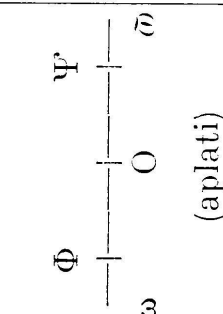
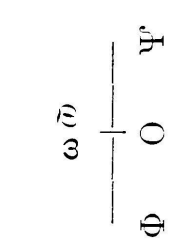
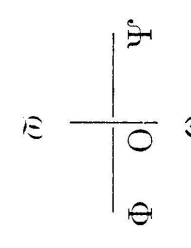
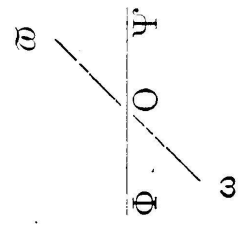
En outre: l'ordre de ces trois opérations peut être changé, en s'astreignant seulement à effectuer I_2 après I_1 ; c'est-à-dire que l'on a indifféremment:

$$\mathcal{C} = I_1 I_2 J = I_1 J I_2 = J I_1 I_2 .$$

Suivant ce qui vient d'être dit ci-dessus, on peut remplacer $I_1 I_2$ par deux inversions $I'_1 I'_2$, un des cercles I'_1 ou I'_2 étant pris arbitrairement dans le faisceau linéaire.

Groupe Γ du plan.

Invariant caractéristique de chaque type de la famille	Néant (1 seul type intrinsèque)	k	Néant (1 seul type intrinsèque)	α	k et α
<i>Circulaire inverse</i> C_i Image: Pôles: Cercles remarquables:	Inversion I Renversement R 1 cercle de points doubles 1 réseau linéaire de cercles doubles	Type C_h Similitude inverse S 2 points doubles 2 cercles doubles 1 faisceau linéaire de cercles 2 à 2 conjugués	Type C_t Retournement D 1 point double 1 cercle double 1 faisceau linéaire de cercles 2 à 2 conjugués	Type C_r Antirotation T 1 couple de points conjugués 1 cercle double 1 faisceau linéaire de cercles 2 à 2 conjugués	
<i>Circulaire directe</i> $C = C^2$ Image: Pôles: Cercles remarquables: Forme du parallélogramme de base:	Transformation identique » — — —	« Homothétie » C_h Homothétie \mathcal{H} 2 points doubles 1 faisceau linéaire de cercles doubles	« Translation » C_t Translation \mathcal{T} 1 point double 1 faisceau linéaire de cercles doubles	« Rotation » C_r Rotation \mathcal{R} 2 points doubles 1 faisceau linéaire de cercles doubles	Type général C Similitude directe S 2 points doubles Pas de cercles doubles ni de cercles conjugués



(parall. quelconque)

(losange)

(aplati)

Ces propriétés sont évidentes sur les images S, D, ou T, de C.

Ou encore: décomposer C en une \mathcal{C} simple et une inversion (théorème XVIII), puis cette \mathcal{C} en deux inversions (théorème XXI).

Cas de $n = 4$. — On obtient la \mathcal{C} la plus générale, d'après le théorème suivant:

THÉORÈME XXIII. — *Toute transformation \mathcal{C} peut être considérée comme le produit de quatre inversions $I_1 I_2 J_1 J_2$, les cercles J_1 et J_2 étant orthogonaux aux cercles I_1 et I_2 .*

En outre: l'ordre des opérations peut être permuté en s'astreignant seulement à effectuer I_2 après I_1 , J_2 après J_1 , c'est-à-dire que l'on a

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= I_1 I_2 J_1 J_2 = I_1 J_1 I_2 J_2 = J_1 I_1 I_2 J_2, \\ &= I_1 J_1 J_2 I_2 = J_1 I_1 J_2 I_2 = J_1 J_2 I_1 I_2. \end{aligned}$$

Bien entendu on peut remplacer $I_1 I_2$ par $I'_1 I'_2$, $J_1 J_2$ par $J'_1 J'_2$, de sorte que la décomposition dépend de deux paramètres arbitraires. Mêmes démonstrations que pour le théorème XXII.

Cas de $n > 4$. — Rien de particulier à signaler.

§ 15. — *Résumé.* — Nous avons rempli le programme que nous nous étions fixés au début: trouver toutes les transformations.

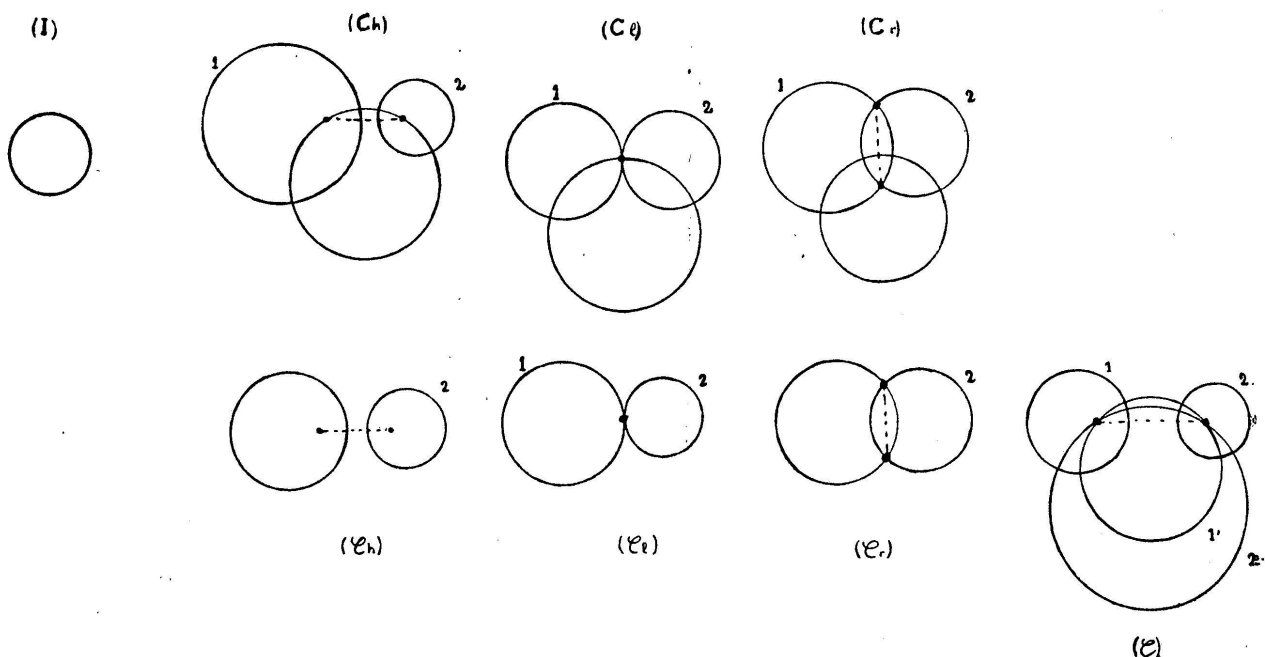


Fig. 20.

circulaires réelles du plan, et donner leurs propriétés essentielles. Les résultats obtenus en ce qui concerne les « décompositions canoniques » en produits d'inversion sont résumés par les schémas de la figure 20. [Les pôles sont marqués par de gros points; l'inversion simple I est représentée par un cercle en trait gras, car tous les points de ce cercle sont doubles; pour distinguer Γ de son inverse, il faut numéroter 1 et 2 les deux cercles correspondant à une même transformation simple composante.]

Le tableau page 177 résume l'ensemble des propriétés invariantes des différents types Γ .

En terminant remarquons que toute la théorie précédente s'applique aux transformations circulaires sur la surface d'une sphère. (Bien entendu, il n'y a plus de foyers à considérer.)

LA COURBE DE L'HÔPITAL

PAR

E. TURRIÈRE (Montpellier).

1. — LA COURBE DE PRESSION CONSTANTE.

La question de la courbe plane de pression constante pour le mouvement sur elle, sans frottement, du point pesant, a été nettement posée par Jean BERNOULLI dans une lettre adressée à LEIBNIZ ¹ en janvier 1695 (*curva aequabilis pressionis*) et dans une seconde lettre, encore adressée à LEIBNIZ, en février 1696; Jean BERNOULLI indiqua l'équivalence du problème et de celui du pendule à fil de tension constante. Il signala, sans explications ni calculs, que la courbe peut être algébrique ou transcendante. Il reposa une troisième fois les mêmes questions dans une pièce des *Acta eruditorum* de 1696 ².

¹ G. G. LEIBNITZ et Joh. BERNOULLI, *Commercium, philosophicum et mathematicum*, I, p. 30 et 134.

² *Acta eruditorum* (Supplementa, t. II), 1696, p. 291.