Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: A. Cartan. — Leçons sur la Théorie des Espaces à connexion projective redigees par P. Vincensini (Gahiers scientifiques publies sous la Direction de M. Gaston Julia. Fascicule XVII). —Un volume gr. in-8° de vi-308 pages et 34 figures. Prix: 85 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1937.

Autor: Buhl, A.

représentations d'aujourd'hui par matrices et par moules analytiques l'auraient indisposé. Et cependant, il fit de la philosophie scientifique! Il faut donc toujours remarquer que ce que l'on apprécie au maximum est l'art de construire. Tout sera permis au bon constructeur, alors que sa construction, s'ajoutant à tant d'autres, sera bientôt assimilée à une pièce de musée.

Albert Michelson conduit à des réflexions analogues. Il a fait douter de l'éther, il fut einsteinien avant la lettre mais sa tournure d'esprit ne lui permettait guère de s'associer aux doutes qu'il faisait naître chez les autres. Ici une grande fixité de vues permet de réaliser « des idées »; elle ne permet pas de dominer un monde d'idées comme celui des théories électroniques ou photoniques.

En traitant, à l'Université Clark, en 1899, de « L'extension de l'idée de fonction pendant le dix-neuvième siècle », M. Emile Picard a fait de merveilleuses prophéties pour le siècle présent. Il était donc indiqué, au plus haut point, de reproduire un exposé datant d'une quarantaine d'années.

Abrégeons pour le reste, pour Sadi Carnot et la puissance motrice du feu, pour les aperçus techniques concernant l'Ecole Centrale et l'Ecole normale de Sèvres. Descartes et le Discours de la Méthode sont habilement replacés dans un monde intuitif que l'auteur du Discours croyait surtout logique.

Le jubilé d'Edouard Goursat et de Marcel Brillouin terminent, en toute cordialité, des pages dont la philosophie propre est faite d'une profonde sérénité.

A. Buhl (Toulouse).

E. Cartan. — **Leçons sur la Théorie des Espaces à connexion projective** rédigées par P. Vincensini (Cahiers scientifiques publiés sous la Direction de M. Gaston Julia. Fascicule XVII). — Un volume gr. in-8° de VI-308 pages et 34 figures. Prix: 85 francs. Gauthier-Villars, Paris, 1937.

Encore un Cours, de M. Elie Cartan, qui paraît représenter l'une des plus belles formes de la Géométrie. La Géométrie différentielle projective concerne les propriétés conservées par la transformation homographique. Au premier abord ceci est d'aspect élémentaire et cependant, rien qu'en interprétant la petite fonction homographique à variable complexe z, on arrive à l'automorphisme selon Klein et Poincaré. Et, au delà, il y a les espaces « à connexion projective » qui, en somme, peuvent être fort quelconques mais dans lesquels l'instrument d'analyse sera la Géométrie précédente. D'où des Gravifiques, des Théories universelles, à connexion projective. Ces constructions tentent, avec quelques insuffisances mais aussi avec de remarquables succès, d'égaler et parfois de surpasser la Gravifique einsteinienne bâtie dans l'espace de Riemann. On peut se demander si de telles théories existeraient, sous leur forme actuelle, si le prodigieux animateur qu'est Albert Einstein n'avait lancé la Science dans des voies longtemps insoupçonnées. Pourquoi pas ? Ainsi la géométrie projective des courbes planes est due à G. Halphen, d'où de belles notions d'invariance, travaillées encore par Paul Appell, avec lesquelles on pourrait faire bien des choses. Oui, mais il est probable que tout cela serait resté science abstraite, comme précisément la géométrie différentielle riemannienne, si Einstein n'en avait indiqué la valeur physique, certaine au point de vue métrique, possible maintenant au point de vue projectif. Pour reprendre une expression due à M. Cartan lui-même, nous sommes encore dans l'un des cas du « contre-coup formidable » subi par la Géométrie, du fait de l'apparition du mouvement einsteinien.

Dans ce livre si profond et intéressant, M. Cartan commence naturellement par étudier la droite projective réelle ou les mouvements rectilignes d'un point M, quand le rapport anharmonique (MABC) est une fonction de t. Deux mouvements projectivement égaux conduisent immédiatement (dès la page 3) à la dérivée de Schwarz bientôt associée à une équation différentielle linéaire du second ordre. Des réciprocités entre points mobiles et points repères développent cette analyse. L'introduction de variables complexes fait retrouver ces repères dans la Géométrie de Poincaré étendue alors au champ complexe. Ceci est d'une simplicité inattendue quant à l'approche des fonctions fuchsiennes ou kleinéennes ou, tout au moins, des groupes qui leur servent de support.

Dans le plan réel (Ch. II), la généralisation de telles considérations conduit aux réductions d'équations différentielles linéaires du troisième ordre. A signaler ici le *développement projectif* d'une courbe provenant de la possibilité de définir un rapport anharmonique sur la tangente. Il y a de même une *courbure projective*. Tout ceci fait intervenir des éléments différentiels d'ordre élevé d'où une géométrie plus compliquée que celle d'Euclide mais qui interprète des systèmes différentiels nouveaux. Les équations de structure du groupe projectif font reprendre les notions de dérivée *extérieure* et de produit *extérieur*, notions qui jouent un grand rôle sous les intégrales multiples; si bien que toute cette géométrie différentielle peut dépendre maintenant d'un substratum intégral. C'est là l'une des idées essentielles de M. Elie Cartan avec laquelle il a renouvelé la Théorie des groupes de Sophus Lie. La Géométrie projective des surfaces (Ch. III) contient des notions telles que celle de surfaces *projectivement* applicables et ceci avec des notations étonnamment simples où les formes différentielles jouent un grand rôle; la géométrie exposée était nécessaire pour l'interprétation de toute cette analyse pfaffienne.

Soyons plus brefs quant à la Deuxième Partie consacrée aux « Espaces à connexion projective » et composée de sept chapitres. Comme nous l'avons dit plus haut, il s'agit d'étudier, avec l'instrument projectif, ce qui n'est plus forcément projectif. Des *cycles* projectifs ne se ferment plus, en général, dans un espace où n'existe qu'une connexion projective, d'où l'apparition d'une *torsion*. L'analogie avec la Géométrie riemannienne s'impose alors si bien qu'il faut construire toute une Algèbre et tout un Calcul tensoriel de nature projective. Ces constructions sont aussi maniables que celles faites dans les Espaces de Riemann et tournent à l'avantage de ces derniers espaces et de la Gravifique. L'immense valeur de ce qui s'étend si bien n'est-elle pas maintenant évidente. Les formes intégrales et les formules stokiennes réapparaissent. Mêmes remarques pour les identités de Bianchi. Extensions, de nature projective, des équations des géodésiques riemanniennes. Géométrie des surfaces plongées dans les espaces à connexion projective à trois dimensions. Et enfin groupe d'holonomie d'un espace à connexion projective, ce groupe étant, pour ainsi dire, la garantie suprême de la possibilité d'explorer tout l'espace en question, par méthode projective.

Quel éloge ajouter à un tel exposé ? Bornons-nous à mentionner que la rédaction de M. Paul Vincensini est celle d'un géomètre averti, dont les travaux originaux ne sont plus à signaler et auquel M. Elie Cartan a témoigné une confiance bien méritée.

A. Buhl (Toulouse).