

# Réunion de Soleure, 29 août 1936.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **36 (1937)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications.

---

*Réunion de Soleure, 29 août 1936.*

La Société mathématique suisse a tenu sa 26<sup>me</sup> assemblée annuelle à Soleure, le 29 août 1936, sous la présidence de M. le prof. R. Wavre (Genève), en même temps que la 117<sup>me</sup> session annuelle de la Société helvétique des sciences naturelles. La partie scientifique a été consacrée aux neuf communications ci-après. Elle a été suivie d'une courte séance administrative.

La prochaine réunion annuelle aura lieu à Genève, le samedi 28 août 1937.

1. — G. HUNZIGER (Reinach). — *Nachweis von Fehlern in der euklidischen Parallelen-theorie.*

2. — Heinz SCHILT (Zurich). — *Sur les surfaces isométriques non applicables l'une sur l'autre.* — a) Deux surfaces sont dites *isométriques*, s'il est possible de les représenter l'une sur l'autre en conservant les longueurs. La représentation en question est une *isométrie*. De plus, s'il existe entre deux surfaces isométriques une famille continue de surfaces isométriques, les deux surfaces sont dites *applicables* l'une sur l'autre et nous appellerons par la suite la représentation correspondante une *déformation*.

Il est clair que toute déformation est une isométrie. La question se pose de savoir si l'inverse est vrai.

b) En 1908, E. E. LEVI a, pour une vaste classe de surfaces, répondu par l'affirmative à cette question, en démontrant le théorème suivant <sup>1</sup>:

« Deux surfaces isométriques à courbure négative ou partout nulle sont toujours applicables l'une sur l'autre; par contre de deux surfaces isométriques à courbure positive l'une est toujours applicable ou sur l'autre ou sur la symétrique de celle-ci. Deux surfaces à courbure

---

<sup>1</sup> E. E. LEVI, Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili. *Atti della Accademia di Torino*, 43 (1907-1908), p. 292-302.

positive, symétrique l'une de l'autre, ne sont jamais applicables l'une sur l'autre. »

Le problème est donc résolu pour toutes les surfaces dont la courbure est de signe constant.

c) Je me propose de construire des surfaces isométriques qui ne sont pas applicables l'une sur l'autre. Le théorème de Levi exclut les surfaces dont la courbure est de signe constant; nous exigerons plutôt de nos surfaces qu'en un de leurs points la courbure s'annule et reste constamment négative dans le voisinage de ce point. Il est aisé de démontrer qu'une surface répondant à cette hypothèse a dans le voisinage du point l'allure d'un col auquel aboutissent un certain nombre de vallées et le même nombre d'arêtes. Si ce nombre de vallées resp. d'arêtes est  $n$ , nous dirons que le point est un *point selle d'ordre*  $n$ , ou tout court une selle d'ordre  $n$ .

d) Ceci posé, il est possible de démontrer pour nos surfaces les théorèmes suivants:

« Si un point d'une surface n'est pas un point plan, ce point est une selle d'ordre 2. »

« Si deux surfaces isométriques ont, en des points correspondants, des selles d'ordres différents, elles ne sont pas applicables l'une sur l'autre. »

e) La construction de paires de surfaces de ce genre n'offre aucune difficulté. Soit  $F$  une surface ayant en  $O$  une selle d'ordre  $n > 2$  (par exemple, en coordonnées cylindriques,  $z = r^n \cos n\varphi$ ). Il existe alors une surface  $F'$  isométrique de  $F$ , qui au point correspondant  $O'$  a une selle d'ordre 2. Puisque, comme nous l'avons vu plus haut, un point selle qui n'est pas un point plan, est toujours d'ordre 2, l'existence de  $F'$  est assurée par le théorème suivant:

« Soit  $O$  un point d'une surface  $F$  quelconque; il existe toujours une portion de surface  $F'$  isométrique à un voisinage de  $O$  et ne possédant aucun point plan. »

Ce théorème se démontre à l'aide des théorèmes d'existence des équations aux dérivées partielles appliqués à une certaine équation différentielle du type de Monge-Ampère, de laquelle dépend le problème de l'isométrie.

3. — René DE SAUSSURE (Berne). — *Le système linéaire des lignes de courant d'un fluide en état de mouvement dans l'espace.* — Soit  $M$  une molécule du fluide et  $D$  la tangente (affectée d'un sens) à la trajectoire de cette molécule: la figure  $(MD)$  est une *flèche*. Dans l'espace plan un fluide en état de mouvement détermine une bisérie ( $\infty^2$ ) de flèches, puisqu'il détermine une flèche en chaque point du plan. Le système linéaire des lignes de courant dans un plan est donc formé par les lignes de courant d'une bisérie linéaire de flèches (*couronoïde* de flèches); c'est-à-dire par un système de cercles tangents en un même point  $M_0$  à une même droite  $D_0$ .

Dans l'espace, un fluide en état de mouvement détermine en chaque point un *feuillelet*, c'est-à-dire une figure formée par la molécule M qui se trouve en ce point, par la tangente D à la trajectoire de cette molécule et par le plan osculateur P de cette trajectoire. A chaque feuillelet (MDP) est associée une quantité numérique (une *cote*) qui représente la vitesse de la molécule M; le fluide en état de mouvement définit donc une triserie ( $\infty^3$ ) de *feuillelets-cotés*. Par suite:

*Le système linéaire des lignes de courant dans l'espace est formé par les lignes de courant d'une triserie linéaire de feuillelets-cotés, c'est-à-dire par les lignes de courant d'une tricouronne.*

Il serait intéressant de déterminer la forme et la nature de ces lignes de courant.

4. — L. KOLLROS (Zurich). — *Sur les manuscrits de Steiner.* — Dans la préface du tome II des Œuvres complètes de Steiner, WEIERSTRASS disait déjà que, selon l'avis de GEISER, les manuscrits contenaient peu de choses nouvelles. Il y a, en effet, beaucoup de travaux préparatoires et de projets de rédaction des mémoires déjà imprimés.

Parmi les manuscrits de Küsnacht deux seuls étaient prêts pour l'impression: ceux qui ont été publiés à la fin des *O.c.*; et parmi ceux de Berne, il y avait l'œuvre de jeunesse préparée depuis 1826 et imprimée il y a cinq ans.

On a trouvé en outre les solutions de quelques problèmes posés dans les *O.c.*, tome I, p. 127-28, 157-58, 177, 224 et tome II, p. 467; mais il n'y a nulle part de démonstration de la solution élégante du problème de Malfatti (I, p. 37), ni les solutions des problèmes proposés à la fin de la *Systematische Entwicklung* (I, p. 440 à 458). La formule de la page 329 du tome II n'est démontrée que dans le cas du cercle. Les derniers manuscrits sont souvent inachevés.

J'ai déjà indiqué (*Comm. mat. helv.*, vol. 6, p. 154) la généralisation de la droite de Simson et la découverte, en 1824, des théorèmes de MIQUEL (1845) et de CLIFFORD (1870). Le théorème de FAURE: « Les sphères harmoniquement circonscrites à une quadrique en coupent orthogonalement la sphère orthoptique » avait été trouvé par STEINER en 1845 sous sa forme projective la plus générale. Dans plusieurs manuscrits il démontre et développe un théorème que JACOBI lui avait proposé; mais ses résultats ont été retrouvés en 1872 par DARBOUX dans une étude intitulée: « Sur les théorèmes d'Ivory relatifs aux quadriques homofocales ».

Les travaux sur les propriétés générales des courbes algébriques (II, p. 493-500) comptent parmi les plus importants. Steiner avait l'intention de publier quelque chose d'analogue sur les surfaces algébriques avec l'aide de SCHLÄFLI. Il est regrettable que ce projet n'ait pas pu se réaliser. Presque tout ce qui a été trouvé à ce sujet



dans les manuscrits est compris dans les travaux de CREMONA (*Op. mat.*, I, p. 317..., II, p. 281...).

Quelques questions générales sur les courbes et les surfaces algébriques que Steiner s'était posées n'ont été traitées ni par Cremona, ni par ses successeurs. Un de mes assistants, M. PAULI, en a trouvé la solution. Sa thèse paraîtra prochainement.

5. — Georges DE RHAM (Lausanne). — *Sur la détermination de certains invariants topologiques.* — Etant donné une variété  $V$  et une transformation topologique  $g$  de  $V$  en elle-même, sans point fixe et dont la puissance  $p^{\text{ième}}$  se réduit à l'identité, en assimilant à un point unique les  $p$  points de  $V$  qui se déduisent de l'un d'eux par la transformation  $g$  et ses puissances, on obtient une nouvelle variété  $W$ . L'objet de la présente communication était d'indiquer un moyen simple de déterminer les nombres de Betti et les coefficients de torsion de  $W$ , dans le cas où  $V$  est une variété close sans torsion et  $p$  un nombre premier. Ce procédé a été appliqué aux exemples qu'on obtient en prenant pour  $V$  soit une sphère, soit le produit topologique de deux sphères à un nombre quelconque de dimensions.

6. — R. WAVRE (Genève). — *Sur le potentiel logarithmique calculé dans l'espace complexe.* — Dans une Note récente <sup>1</sup> j'ai dit les raisons pour lesquelles il s'impose de calculer les potentiels en donnant aux variables, coordonnées  $x_h$  du point attiré, des valeurs complexes  $z_h$ .

Nous résumerons ici les résultats obtenus pour le potentiel logarithmique grâce à l'artifice suivant. On peut écrire

$$r^2 = (z_1 - c_1)^2 + (z_2 - c_2)^2 = (Z - C)(Z' - C')$$

avec

$$\begin{aligned} Z &= z_1 + iz_2, & C &= c_1 + ic_2, \\ Z' &= z_1 - iz_2, & C' &= c_1 - ic_2. \end{aligned}$$

Soit  $l$  la ligne décrite par  $C$  et  $l'$  celle qui est décrite par  $C'$ , reportons-les ainsi que les points  $Z, Z'$  dans un même plan complexe auxiliaire.

a) Il existe quatre potentiels logarithmiques holomorphes, pour une simple couche fermée, suivant que l'on a 1°  $Z$  hors de  $l$  et  $Z'$  hors de  $l'$ ; 2°  $Z$  dans  $l$  et  $Z'$  hors de  $l'$ ; 3°  $Z$  hors de  $l$  et  $Z'$  dans  $l'$ ; 4°  $Z$  dans  $l$  et  $Z'$  dans  $l'$ . Ces quatre domaines sont à 4 dimensions.

b) Si la ligne génératrice est réelle, les courbes  $l$  et  $l'$  sont conjuguées et les potentiels correspondant aux cas 1° et 4° coïncident dans le domaine réel avec les deux potentiels connus.

<sup>1</sup> *Comptes rendus de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève*, juillet 1936.

c) Pour une ligne attirante réelle, il existe également quatre potentiels holomorphes de double couche suivant les circonstances 1<sup>o</sup> ... 4<sup>o</sup>. Si la densité est constante et égale à l'unité, les potentiels se réduisent aux valeurs 0,  $\pi$ ,  $\pi$ ,  $2\pi$ . Dans le réel la valeur  $\pi$  n'est prise que sur la ligne attirante.

d) Dans le cas d'un domaine attirant réel, simplement connexe et homogène, il existe encore quatre potentiels distincts, engendrés dans les domaines 1<sup>o</sup> ... 4<sup>o</sup>. Ici  $l$  est la ligne qui limite le domaine attirant. Dans les circonstances 2<sup>o</sup>, 3<sup>o</sup>, 4<sup>o</sup> les potentiels ne sont plus holomorphes, car ils dépendent d'une coupure tracée d'un point  $Q$  de  $l$  au point  $Z$  ou encore d'un point  $Q'$  de  $l'$  au point  $Z'$ . Mais ils ne diffèrent de certaines fonctions holomorphes que par des intégrales étendues aux coupures

$$\int_Q^Z \bar{Z} dZ \quad \text{et} \quad \int_{Q'}^{Z'} \bar{Z}' dZ' .$$

Si le point potentié  $z_1, z_2$  devient réel et si l'on prend deux coupures conjuguées, on retrouvera le potentiel réel à l'intérieur du domaine attirant.

Ce dernier résultat a été mis en évidence grâce à une méthode employée par M. G. HERGLOTZ dans son travail sur le potentiel de 1914. Par l'emploi de la méthode de M. E. SCHMIDT, étendue aux potentiels complexes, M. F. BEER a obtenu récemment des résultats analogues. Il faut aussi mentionner, d'un autre point de vue, les beaux résultats de MM. VOLTERRA et APPELL sur le potentiel créé par des corps complexes.

7. — M. GUT (Zurich). — *Ueber Erweiterungen von unendlichen algebraischen Zahlkörpern.* — Il existe des corps de nombres algébriques  $c$  de degré infini qui possèdent la propriété que pour tous les idéaux premiers de  $c$  le degré absolu et l'ordre absolu sont finis. Un exemple d'un pareil corps est l'ensemble de tous les corps absolument cycliques dont le degré est un nombre premier fixe.

Pour de pareils corps  $c$  on peut, indépendamment de la théorie générale des élargissements des corps de nombres algébriques de degré infini telle que HERBRAND l'a donnée, développer d'une manière très simple la théorie des élargissements de degré fini et gagner par là des théorèmes nouveaux. En effectuant les changements nécessaires, on voit que la théorie arithmétique que ORE a développée pour les élargissements de degré fini des corps de nombres ordinaires (voir *Math. Ann.*, vol. 96, p. 313 (1926) et vol. 97, p. 569 (1927)) reste valable pour ces corps  $c$ .

(Le travail paraîtra dans les *Commentarii Mathematici Helvetici.*)

8. — Pierre DIVE (Marseille). — *Difficultés dans l'interprétation einsteinienne du temps et de l'espace relatifs*. — Je ne puis signaler ici, très brièvement, que quelques points particuliers de critique, réservant un exposé plus complet pour une prochaine publication.

I. Le problème du disque tournant, exposé par M. EINSTEIN dans la plupart de ses ouvrages, est destiné, on s'en souvient, à montrer que 1<sup>o</sup>, « si... on considère les systèmes privés d'inertie comme des systèmes également admissibles, la géométrie euclidienne doit être abandonnée<sup>1</sup> » et que, 2<sup>o</sup>, dans les mêmes conditions la notion de simultanéité n'a plus de sens.

Qu'on veuille bien, par exemple, se reporter à la « démonstration » d'Einstein<sup>2</sup>: K est le système galiléen dans lequel tourne le disque invariablement lié à un système K'. Il est bien précisé que c'est à « un moment donné t de K » que sont déterminés les nombres P et D des baguettes alignées sur la périphérie et sur le diamètre, et que c'est encore « par rapport à K » que la longueur des baguettes est mesurée. C'est donc bien par rapport à K qu'on a, selon Einstein  $P/D > \pi$  quand le disque tourne. Mais alors, par quelle mystérieuse induction en conclure que « les lois de position des corps rigides par rapport à K' ne concordent pas avec les lois de position des corps d'après la géométrie euclidienne » ?<sup>3</sup> La démonstration peut être corrigée dans la métrique « électromagnétique » de Lorentz. N'empêche que le principe relativiste des longueurs propres<sup>4</sup> et l'invariance de D permettent d'affirmer que la géométrie des corps rigides entraînés avec le disque K', est euclidienne, à condition que celle des corps rigides dans K le soit. Quant à une apparence de cercle non euclidien pour les observateurs au repos dans K et regardant tourner le disque, qui ne voit qu'elle contredirait le principe de symétrie ?<sup>5</sup>

En fait, Einstein utilise pour sa démonstration les équations de Lorentz. Le même procédé appliqué « aux temps » du disque tournant conduirait à admettre qu'un même événement pourrait ne pas être simultané à soi-même !

Dans cette question des règles des horloges entraînées avec le disque, faudrait-il tenir compte non seulement des forces centrifuges, mais encore des réactions des points contigus (forces au sens de la

<sup>1</sup> EINSTEIN, *La géométrie et l'expérience*, p. 5.

<sup>2</sup> Dans son ouvrage intitulé *Quatre conférences sur la théorie de la Relativité* (p. 53), où l'auteur a « visé tout particulièrement à mettre en pleine lumière les principes qui servent de support aux raisonnements de la théorie ».

<sup>3</sup> Et, d'ailleurs, comment la rotation changerait-elle le nombre des baguettes « au repos relativement à K' » ?

<sup>4</sup> Einstein admet que la longueur relative de deux règles est « en principe indépendante de leur histoire ». [Cf. *Quatre conférences*, p. 4 et p. 56.]

<sup>5</sup> Le phénomène est de révolution dans un système galiléen et la périphérie du disque ne peut apparaître que sous la forme d'une circonférence euclidienne:  $P/D = \pi$ .

mécanique classique)<sup>1</sup> ? On s'apercevrait alors que, du point de vue de  $K'$  le champ de force est nul.

II. Einstein affirme que, dans un champ de gravitation, une règle immobile est contractée dans la direction des lignes de force, et qu'une horloge prototype, également immobile dans le champ, bat au ralenti<sup>2</sup>.

Si cette règle et cette horloge sont matérielles — et comment ne le seraient-elles pas ? — elles doivent se mouvoir dans le champ. Et si on les suppose immobiles, c'est qu'on leur applique d'autres forces dont on ne parle pas et dont le  $ds^2$  de Schwarzschild ne saurait tenir compte. Pour éviter la contradiction, allons-nous conclure que cette règle et cette horloge sont immatérielles, fantasmagoriques ?

III. Pour montrer la relativité des temps propres, on imagine que deux horloges, identiques et synchrones lorsqu'elles sont côte à côte, se séparent de telle sorte que l'une d'elles  $H_1$  demeure dans un système galiléen, tandis que l'autre  $H_2$  subit des accélérations avant de venir rejoindre  $H_1$  (exemple proposé par M. LANGEVIN). On déduit alors des formules de Lorentz que le temps propre  $\tau_2$  de  $H_2$  doit au retour être plus petit que celui  $\tau_1$  de  $H_1$ .

Il est évident qu'un tel exemple est nécessaire pour prouver la relativité réelle — et non seulement l'apparence de la relativité — du temps<sup>3</sup>. Or, il y a contradiction à utiliser pour la démonstration le  $ds^2$  euclidien de MINKOWSKI et à admettre, en même temps, l'existence des accélérations du mouvement de  $H_2$ .

J'ai repris le problème au moyen d'un  $ds^2$  non-euclidien convenant à un mouvement de va-et-vient. L'horloge  $H_2$ , qui subit des accélérations, semble battre plus rapidement que  $H_1$  au départ, plus rapidement à l'extrémité de son excursion et plus rapidement encore à son retour. C'est seulement dans une partie médiane de sa course que son temps propre semble s'écouler plus lentement.

Il ne paraît donc pas encore établi que la géométrie euclidienne doive être abandonnée, ni que les temps propres (ou vécus) soient relatifs.

9. — FR. BÁBLER (Göttingen). — *Ein Satz aus der Theorie des Graphen.*

<sup>1</sup> Desideratum déjà formulé par EDDINGTON, *Espace — Temps — Gravitation*, p. 93.

<sup>2</sup> La prévision relativiste du déplacement vers le rouge des raies du spectre solaire repose sur cette affirmation.

<sup>3</sup> C'est-à-dire l'existence d'une aberration due au mouvement ou au champ.

Cf. H. VARCOLLIER. *La Relativité dégagée d'hypothèses métaphysiques*. Paris, 1926.