Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Buchbesprechung: René Garnier. — Leçons d'Algèbre et de Géométrie, à l'usage des etudiants des Facultes des Sciences. D'apres la redaction de M. Badrig Guendjian. Tome 111. Elimination. Elements de Geometrie reglee. Transformation de Lie. Applications a la Geometrie conforme. — Un volume gr. in-8° de vi-280 pages et 106 figures. Prix: 80 francs. Gauthier-Villars. Paris, 1937.

Autor: Buhl, A.

qui sont d'une symétrie simple semblant toujours correspondre à la simplicité des schèmes projectifs. La droite serait alors un élément géométrique maniable comme le point, parfois comme la sphère, suivant une idée de Sophus Lie.

Parmi les grands auteurs, dont les créations reçoivent ainsi une vie nouvelle, mentionnons encore Bianchi, Bieberbach, Cayley, Cremona, Frenet, Fubini, Grassmann, E. Pascal, Plücker, Reye, Weingarten. Ces noms, cités dans le désordre alphabétique, se rapportent à des sujets fort divers mais entre lesquels la géométrie projective de l'auteur établit les liens les plus remarquables et les plus harmonieux.

A. Buhl (Toulouse).

René Garnier. — **Leçons d'Algèbre et de Géométrie,** à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences. D'après la rédaction de M. Badrig Guéndjian. Tome III. Elimination. Eléments de Géométrie réglée. Transformation de Lie. Applications à la Géométrie conforme. — Un volume gr. in-8° de vi-280 pages et 106 figures. Prix: 80 francs. Gauthier-Villars. Paris, 1937.

C'est avec une chaude sympathie que nous avons suivi le développement de ce bel ouvrage. Les tomes précédents (voir *Ens. math.*, **35**, 1936, p. 166) pouvaient sembler parfois un peu elémentaires non du fait de l'auteur mais de par les sujets qu'il s'astreignait à traiter et surtout à cause du public assez inexpérimenté auquel il s'adressait. Nous voici au tome III; le niveau s'est élevé graduellement et les contacts sont nombreux avec de récents ouvrages étrangers, notamment avec les deux dont l'analyse bibliographique précède. Mais ici nous trouvons des noms tels que ceux de MM. Cartan et Godeaux que les ouvrages allemands ignorent un peu trop, surtout quand il s'agit de Géométrie projective. Enfin mentionnons tout de suite que ce tome III ne semble nullement publié comme un tome III « et dernier ». L'ouvrage reste donc ouvert sur d'autres merveilles qu'on peut, au moins, pressentir.

Pour l'instant, nous débutons par l'élimination appuyée sur les fonctions symétriques. Le premier aboutissement remarquable est l'identité de Bezout $Af + Bg = 1$ autour de laquelle se groupent, dans l'espace comme dans le plan, des questions de dénombrement de points d'intersection ou d'éléments communs, questions qui constituent la Géométrie énumérative (abzählende Geometrie).

Les lieux géométriques suivent, leur place logique étant après l'élimination. Mais ceci n'empêche pas M. Garnier de commencer par des cas très simples, de revenir sur les cylindres, les cônes, les conoïdes, les surfaces de révolution, sans oublier les petites malices relatives à la surface d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3 .$$

La très belle géométrie commence avec les coordonnées plückériennes; c'est tout de suite la symétrie matricielle des théories modernes aussi bien physiques que géométriques. Les complexes, tant travaillés à l'étranger, rappellent cependant, surtout par le complexe linéaire, les travaux d'extrême jeunesse de Paul Appell et de M. Emile Picard. Il y a là une géométrie d'éléments conjugués, tout comme pour les quadriques.

Rappelons encore que les *coordonnées kleinéennes* d'une droite quelconque sont au nombre de six et qu'elles sont liées par la relation

$$\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2 + \pi_4^2 + \pi_5^2 + \pi_6^2 = 0 .$$

C'est une hypersphère à six dimensions, de rayon nul, sur laquelle il est loisible d'interpréter la géométrie de la droite. Les complexes peuvent former des faisceaux; le lieu de leurs axes conduit au *conoïde de Plücker* ou *cylindroïde.* La surface réglée du troisième ordre peut dégénérer en *surface de Cayley ; la surface de Kummer* est une surface du quatrième ordre aussi riche que possible en singularités isolées.

Le complexe tétraédral, ou complexe de Reye, est celui des droites perçant les faces d'un tétraèdre en quatre points de rapport anharmonique constant. Cette définition est remarquable à cause des très nombreuses transformations qu'on peut lui faire subir; ceci d'autant plus qu'il existe maintenant toute une géométrie du tétraèdre.

Mais laissons les homographies et les corrélations de la Géométrie projective proprement dite. Il est naturel de faire succéder à celle-ci une géométrie dont l'élément est la sphère, car une sphère, comme une droite, se détermine par quatre conditions. De cette remarque il n'y a qu'un pas à faire pour atteindre la transformation de Lie qui change les droites en sphères. Le monde des sphères connaît de merveilleuses configurations à étudier en coordonnées pentasphériques; on aborde le monde *conforme.* Les substitutions orthogonales, en coordonnées pentasphériques, conduisent aux transformations de contact conservant les lignes de courbure; au fond de tout ceci, il n'y a que rotations, homothéties, inversions, mais voilà qui suffit aux homographies complexes dont les groupes fuchsiens et kleinéens sont des cas particuliers.

Nous ne pouvons détailler davantage. La fin du livre est d'une magnifique esthétique, grâce à des développements matriciels explicites, ayant une signification immédiate qu'on trouve rarement en Physique théorique. Cette fin est évocatrice des plus grands souvenirs qui s'attachent au nom de Gaston Darboux.

A. BUHL (Toulouse).

Joseph Miller THOMAS. — **Differential Systems** (American Mathematical Society Colloquium Publications. Volume XXI). — Un volume gr. in-8° de x-120 pages, relié. Prix: $2.00. American mathematical Society. New-York. 1937.

Cet ouvrage traite des systèmes différentiels à un point de vue qui fut surtout celui du géomètre français Riquier inspiré par des idées préliminaires, fécondes, quoique pas toujours exactes, dues à Méray. Mais, de toutes façons, le sujet était prodigieux; il est de ceux qui font le plus grand honneur à la Science française. Il a été poursuivi, en France même, par M. Janet.

Il s'agit, on le sait, d'étendre, aux systèmes différentiels, les propriétés des systèmes algébriques et ce en conservant des conceptions plutôt algébriques et formelles qu'en adoptant des conceptions analytiques. Non seulement la chose est possible mais elle peut même s'étendre, après coup, à des systèmes fonctionnels généralisant ceux à constitution simplement algébrique et différentielle. Une telle théorie a une valeur d'autant plus indéniable que cette valeur progresse avec les progrès de l'Algèbre;