

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 15.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BIBLIOGRAPHIE

Paul APPELL. — **Traité de Mécanique rationnelle.** Tome quatrième.
Fascicule II. Figures d'équilibre d'une masse hétérogène en rotation.
Figure de la Terre et des planètes. Deuxième édition mise à jour par
Alex. Véronnet. — Un volume gr. in-8° de XII-292 pages. Prix: 65 francs.
Gauthier-Villars, Paris, 1937.

Ce n'est pas sans émotion que l'on ouvre ces pages où Paul Appell vit encore. Malgré certaines critiques, je ne pense pas que M. Véronnet en ait déformé l'esprit. La vérité me paraît être que Paul Appell, qui avait tant d'élèves et d'admirateurs, pouvait avoir plusieurs commentateurs et continuateurs; il y a là évidemment un grand honneur qui peut être disputé. Il faut tenir compte aussi de ce que la publication du tome IV du *Traité de Mécanique*, relatif à l'équilibre d'une masse *homogène*, a déjà été faite du vivant de Paul Appell (exactement en 1921) avec le concours de M. Véronnet. Ce dernier jouissait donc de la confiance de l'illustre auteur. Depuis nous avons eu, toujours pour le cas homogène, une seconde édition et ceci fait deux volumes dont je n'ai point trouvé trace dans nos analyses bibliographiques. Mais ceci n'empêche pas de venir directement au cas hétérogène, lequel est traité à partir des conditions générales de l'équilibre hydrodynamique. Ces derniers mots ont l'air de s'opposer l'un à l'autre car d'ordinaire ce qui est dynamique n'est pas relatif à un équilibre mais la mécanique moderne nous habite cependant à de telles choses. C'est ainsi qu'il y a indéniablement un équilibre de l'avion en mouvement. Il y a, de même, des mouvements internes qui seuls assurent des équilibres de milieux continus.

La question des équilibres planétaires contient, par nature, d'émouvantes contradictions. La rotation est généralement employée pour *définir* le temps et, dans nombre de raisonnements, on utilise ce temps comme une variable t extérieure au phénomène. La mécanique relativiste est faite pour prêter secours dans de telles circonstances mais ici elle est malheureusement d'une application beaucoup trop compliquée.

De même l'équilibre interne des étoiles relève du problème envisagé. Mais il relève aussi de considérations corpusculaires alliées aux théories ondu-latoires. On voit quelles prodigieuses extensions, philosophiques et mathématiques, sont liées à des questions présentées d'abord comme statiques. Il ne fallait rien moins qu'une impulsion moderne, due à Henri Poincaré et à Paul Appell, pour encourager les chercheurs à débrouiller l'écheveau.

Il y a un *Problème d'Appell*, sur les conditions hydrostatiques restrictives de l'équilibre et sur l'impossibilité du mouvement à la Poinsot. Il y a un axe unique ainsi que des surfaces de niveau et d'égale densité qui sont de

révolution. Ceci est compatible soit avec un équilibre relatif soit avec un mouvement permanent de molécules animées de vitesses différentes.

Avec les idées de Hamy et les surfaces de niveau ellipsoïdales on arrive à des méthodes d'approximation enfermant les figures d'équilibre *entre* des figures ellipsoïdales; d'où les figures dérivées des ellipsoïdes. La question de l'aplatissement, qui préoccupait déjà Clairaut, peut être suivie ici, par continuité, depuis les figures voisines de la sphère jusqu'à celles voisines du disque aplati. Un anneau équatorial, non séparé, peut apparaître.

La figure de la Terre est encore un problème de Clairaut ingénieusement repris par Poincaré avec une transformation de Radau. La recherche des *lois de densités* ne va pas sans d'intéressantes considérations limites en dehors desquelles nous arrivons peut-être aux tremblements de terre et à de certains déplacements polaires.

Les théories limites à la Clairaut s'appliquent à Jupiter et à Saturne. Au delà, nous sommes dans les généralités cosmogoniques qui, comme il est indiqué plus haut, peuvent s'étendre au monde stellaire. M. Véronnet attribue, aux méthodes étudiées, une grande puissance synthétique. Il les considère comme assez avancées pour satisfaire, à la fois, géologie et cosmogonie. Quoi qu'il en soit, la liaison est possible.

Les travaux de MM. Dive et Wavre n'ont pas été oubliés; M. Véronnet en fait le résumé « avec les remarques et les réserves qu'ils suggèrent ». Très impartiallement et avec le vif désir de ne pas envenimer la question, nous noterons, comme un fait, que du côté de MM. Dive et Wavre il y a aussi quelques réserves concernant l'exposition de M. Véronnet.

Personnellement je regrette de ne pas trouver davantage, dans cette exposition, l'influence des *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten* de Léon LICHTENSTEIN (voir *L'Ens. math.*, **32**, 1933, p. 112). Malgré tout, M. Véronnet a fait une belle œuvre dont quelques incertitudes mêmes pourront engendrer de nouveaux travaux. On ne peut guère demander mieux à un ouvrage d'enseignement concernant un domaine éminemment fluide.

A. BUHL (Toulouse).

Stanis'aw SAKS. — **Theory of the Integral.** Deuxième édition. Traduction anglaise de L. C. Young, avec deux Notes du Prof. Stefan Banach (*Monografie matematyczne*, Tome VII). — Un volume gr. in-8° de VIII-348 pages. Prix: 5 dollars U.S.A. Warszawa-Lwów. G.-E. Stechert & Co, New-York, 1937.

Voici quatre ans que les *Monografie matematyczne* ont commencé à paraître et que non sans un grand empressement nous avons signalé cette apparition dans *L'Enseignement mathématique* (**32**, 1933, p. 269). Le succès probable est devenu tout ce qu'il y a de plus certain. La *Théorie de l'Intégrale*, de M. Saks, atteint sa seconde édition avec une rapidité presque incroyable par le temps qui court. Les éloges seraient superflus. Par exemple, ce qui frappe c'est que la première édition était en français et que celle-ci est en anglais. Quelle mystérieuse attraction y a-t-il entre Iles Britanniques ou Etats-Unis et la Théorie des intégrales généralisées ? Inutile d'approfondir. Nous nous étonnerons encore un petit peu plus, tout à l'heure, avec l'ouvrage de M. Kestelman.

Pour celui de M. Saks, nous pourrions renvoyer à l'analyse déjà publiée (*loc. cit.* p. 270) et indiquer les adjonctions. C'est assez délicat, les nou-

veautés étant fort bien incorporées au texte primitif. L'auteur lui-même signale surtout qu'il a corrigé quelques erreurs de la première édition, qu'il doit y en avoir d'autres dans la seconde et même qu'il y en aurait davantage sans les secours bienveillants de MM. J. Todd, A.-J. Ward et A. Zygmund. Bravo. Il faut avoir du génie pour pouvoir parler franchement un tel langage. Le sujet ne se soutient pas toujours par des considérations intuitives et l'on sait que si, par hasard, on s'abandonne à l'intuition c'est pour risquer, de ce fait, des erreurs caractéristiques. On dit souvent que, pour bien comprendre les théories physiques nouvelles il faut faire abstraction des habitudes expérimentales de jadis. De même, pour bien comprendre les nouvelles généralités intégrales, même lorsqu'on parle encore un langage à forme géométrique, il y a avantage à oublier des intuitions puériles pour s'en rapporter strictement au contenu des définitions.

L'intégrale est définie sur des ensembles qui peuvent être éloignés des considérations spatiales vulgaires et qui sont, en tout cas, de structure incomparablement plus précise. L'idée de mesure précède-t-elle le concept d'intégration ? Sans doute, au point de vue historique. Mais, au point de vue logique, la discrimination est souvent malaisée. C'est pourquoi, après les développements à la Borel et à la Lebesgue, nous trouvons la mesure de Carathéodory véritablement construite de toutes pièces non pas *dans* mais *avec* les espaces métriques. Et comme ce qui est métrique peut être physique, on voit quels immenses avantages il y a à espérer de telles constructions mathématiques. La mesurabilité a aussi de certains caractères d'invariance qui la maintiennent dans les domaines utiles.

L'intégrale à la Lebesgue est aussi à rapprocher intimement de celle qui fut conçue antérieurement par Stieltjes. Successeur de Stieltjes à Toulouse, parlant dans la chaire où il parlait jadis je n'écris jamais ce nom sans une profonde vénération. C'est là qu'on trouve la notion de fonctions d'*un intervalle*, créées selon la nature de l'intervalle. Et aussi la notion de *graphes fonctionnels* (p. 88).

Une curieuse nouveauté de la présente édition me paraît constituée par l'espace tore ou torique (torus space). Cet espace, à une infinité de dimensions, est distancié; il commence par être cylindrique d'ordre m lorsqu'on peut n'y considérer que les m premières coordonnées de tout point. Il y a là une analogie avec les considérations euclidiennes qui se poursuit simplement jusque dans les considérations intégrales.

L'aire d'une surface $z = F(x, y)$ nous ramène à des subtilités particulièrement aisées à considérer dans le cas de deux variables.

Les fonctions majeures et mineures sont associées à l'intégrale de Lebesgue suivant les conceptions de M. Ch. J. de la Vallée Poussin. Elles donnent des applications aux fonctions de variables complexes avec Morera, Goursat, Montel, Looman, Menchoff. La possibilité d'associations majeures et mineures conduit à l'intégrabilité selon Perron avec liaisons possibles concernant encore l'intégrale de Stieltjes.

L'espace (cette fois au sens très vulgaire du mot) nous manque pour décrire davantage. Insistons cependant sur le point de vue géométrique qui n'est déconsidéré nulle part à condition qu'il ait une généralité convenable. Il emprunte alors beaucoup à l'Ecole française, aux espaces abstraits de M. Maurice Fréchet et aux notions de Géométrie infinitésimale directe de M. Georges Bouligand. Après ces considérations, après l'intégrale de M. Arnaud Denjoy, on se demande si la notion d'intégrale n'est pas indé-

finiment généralisable et même on le croit. Quels nouveaux mondes intégraux se révéleront dans un proche avenir ? Je n'ose risquer un pronostic. Mais je conseille l'étude du beau livre de M. Saks à qui veut être prophète.

A. BUHL (Toulouse).

H. KESTELMAN. — **Modern Theories of Integration.** — Un volume gr. in-8° relié de VIII-252 pages. Prix: 17s. 6d. net. At the Clarendon Press. Oxford, 1937.

Décidément les Théories modernes, concernant l'intégration, triomphent avec l'appui de la langue anglaise. Le précédent volume, en texte anglais, est cependant d'origine polonaise et imprimé en Pologne. Celui-ci est absolument anglais et vient même de l'Université de Londres. Y a-t-il eu quelque collaboration, au moins télépathique, entre les deux auteurs ? Les gloires françaises des Lebesgue et des Denjoy suscitent-elles des accumulations d'émulations ? Ce serait bien naturel. Mais pourquoi, plus particulièrement, sous forme anglaise ? Enfin mettons qu'il n'y ait là qu'une coïncidence fortuite et voyons ce nouvel et toujours très bel ouvrage. Il semble que, pour le sujet, on ne recule devant aucune dépense.

L'auteur, dans sa Préface, explique fort bien ce qu'il a voulu faire. Les ouvrages anglais ne méconnaissent pas M. Henri Lebesgue mais ne mettent point suffisamment en rapport son œuvre avec celle, plus simple, de M. C. Carathéodory. En suivant cet auteur, on peut arriver à identifier complètement *mesure* et *intégration*. L'avantage est aussi net dans le cas de n variables que dans le cas d'une seule. Il faut aussi remonter jusqu'à l'intégrale de Cauchy-Riemann, bien concevoir les cas, déjà très étendus, où elle est suffisante et n'arriver à l'intégrale de Lebesgue qu'au seuil des domaines d'insuffisance; c'est plus clair. Il y a aussi un aspect géométrique de l'intégrale de Riemann; on ne le négligera pas, les appels à l'intuition géométrique étant seulement évités avec soin (*carefully*) dans les démonstrations. Pour l'intégrale de Denjoy on évitera le recours au transfini. Pour l'intégrale de Perron, on se reporterà à Saks. Enfin les séries de Fourier illustrent les généralités intégrales dans un esprit d'introduction aux *Trigonometrical Series* de A. Zygmund. Les œuvres de G. H. Hardy, C. Carathéodory, S. Saks, S. Banach, W. Sierpinski, les volumes des *Fundamenta Mathematicae* ont été d'inestimables sources de références.

Voilà qui est bel et bon. Toutefois on peut se demander si l'ouvrage ne va pas faire double emploi avec celui de Saks. Mais non. Il est plus élémentaire et serait à étudier d'abord pour qui aurait en main les deux œuvres. De plus, l'auteur, tout en voulant éviter d'avoir recours à l'intuition géométrique, au moins dans les démonstrations, me paraît être un remarquable intuitif. Si c'est malgré lui, le fait n'en est pas moins remarquable et excellent.

Son premier chapitre, sur les ensembles, est une merveille de clarté intuitive. Peut-on, par exemple, établir une égalité, entre deux nombres, sans dénombrement? Oui. Si je constate que, dans une assemblée, chaque personnage est assis sur une chaise et qu'il n'y a pas de chaise vide, je puis affirmer, sans rien compter, que le nombre des personnages est égal au nombre des chaises. Le mot « *noon* » comprend quatre membres mais c'est un agrégat de deux lettres seulement; donc la notion d'agrégat n'a

rien à faire avec celle de multiplicité. Avec de tels débuts, les considérations ensemblistes coulent de source.

A propos de la mesure, au sens de M. Lebesgue, signalons, au Chapitre III, certaines invariances de cette notion pour transformations linéaires. On entrevoit ici d'importantes conséquences physiques. Et, au Chapitre IV, l'intégrale de Lebesgue apparaît bien comme une extension de la notion d'aire.

Le Chapitre VII examine étroitement les liaisons possibles entre intégrales généralisées et dérivées.

Les nécessités de la brièveté nous obligent à la simple mention des extensions dues à Holder et à Denjoy. Pour les séries de Fourier, pages intéressantes sur la sommabilité à la Fejér. Pour les intégrales doubles, nous avons des calculs très explicites.

Tout cela vit, d'une sorte de vie supérieure à la vie mathématique vulgaire. C'est aussi l'analyse d'un monde physique où l'on pénètre à peine mais qui sera peut-être celui des physiciens de demain grâce à de valeureux créateurs et intermédiaires tels MM. S. Saks et H. Kestelman.

A. BUHL (Toulouse).

William Fogg Osgood. — **Functions of Real Variables.** — Un volume gr. in-8° de XII-400 pages, relié rouge et or. Prix: \$4.00 U.S. University Press. The national University of Peking. 1936.

Beau et curieux volume. Le professeur émérite de la Harvard University donne à Pékin un enseignement que, pour ma part, je n'attendais pas en un tel lieu, enseignement qui pourrait servir de modèle à beaucoup d'enseignements européens.

Certains esprits intuitifs voient facilement des « chinoiseries » dans les précautions parfois extrêmes qui accompagnent un exposé concernant les fonctions de variables réelles. Ici les chinoiseries sont exclues bien que nous soyons essentiellement en pays chinois. L'auteur a rassemblé des critères, des « tests » suivant l'expression anglaise, des calculs aux résultats parfois inattendus, qui font profondément réfléchir sur les idées de convergence, de limite, de continuité, même sur la notion de nombre ainsi que sur celle d'opérations commutatives ou non. Mais tout cela se fait dans le domaine saisissable ou très simplement à partir de ce domaine. D'ailleurs, la Préface nous explique que la matière peut laisser un certain libre-arbitre, une possibilité de choix à l'étudiant qui, selon la forme de son intelligence, aura l'impression de créer lui-même des manières de penser propres à la démonstration. Ainsi le Chapitre I se termine avec des produits infinis et un aperçu sur la série hypergéométrique que beaucoup ne verrait qu'à travers des considérations analytiques; mais la notion de convergence y suffit.

Plus loin la notion de convergence *uniforme* précise encore mieux les conditions opératoires relatives à la dérivation et à l'intégration mais sans qu'il soit indispensable de parler de variables complexes; la conception est très moderne et fait sa place à la notion du quasi-analytique.

Les séries de Fourier sont mises en relation, autant qu'il est possible, avec les séries entières; leur sommabilité, suivant les idées de Césaro et de Fejér, milite excellemment en faveur de leur simplicité alors que le fameux

phénomène de Gibbs (The Gibbs Effect) éclaire vivement le passage du continu au discontinu.

Les intégrales définies et les équations fonctionnelles voisinent à propos de la fonction gamma; on peut même reconnaître, dans les équations fonctionnelles, de l'analytique et du non-analytique, si bien que logiquement le point de vue fonctionnel doit s'imposer à l'attention en premier lieu. Si l'on passe d'abord par les équations différentielles, on ne connaît qu'une fonctionnalité étriquée peu propre aux considérations *quantiques*. On peut même se demander si ce n'est pas l'abus de l'esprit analytique qui paraît causer tant de difficultés dans des domaines où il n'est pas sûr que le déterminisme règne en maître. Telles sont les idées qui me semblent, au tout premier abord, venir en droite ligne de Pékin. Un bravo pour la Chine et pour M. William Fogg Osgood.

A. BUHL (Toulouse).

William Fogg Osgood. — **Functions of a Complex Variable.** — Un volume gr. in-8° de VIII-258 pages, relié rouge et or. Prix: \$3.00 U.S. University Press. The national University of Peking. 1936.

Ce volume est manifestement la suite du précédent bien que la chose ne soit pas explicitement indiquée, au moins dans les pages de titre. La présentation matérielle est la même, l'esprit aussi.

Nous avons déjà eu l'occasion, en signalant des ouvrages d'Analyse, d'insister sur le terrain que les méthodes de Cauchy semblent perdre peu à peu. Ici, elles ne perdent rien. Sans doute, les grandioses idées de Riemann, surtout appuyées sur la représentation conforme ou sur l'uniformisation, sont maintenant des idées de premier plan, mais l'intégrale curviligne de Cauchy, les résidus et les développements en série conditionnés par de telles prémisses, sont des constructions d'une si grande valeur esthétique qu'on ne pourrait s'en passer sans avoir tout au moins l'air de mutiler atrocement la Science. Et voici maintenant le savant américain travaillant, en Chine, à répandre surtout des idées d'origine française.

Weierstrass et Riemann suivent. C'est d'ailleurs l'ordre historique. Les fonctions elliptiques sont brièvement présentées avec la notation de Jacobi qui fut toujours celle de Charles Hermite. Et l'auteur n'a pas craint de s'émerveiller encore, sans paraître redouter l'anachronisme, au sujet de l'intégration algébrique de l'équation différentielle d'Euler. C'est toujours prodigieux surtout pour le néophyte.

Le potentiel logarithmique est l'une des clefs de la théorie des fonctions harmoniques. Il conduit aussi à l'intégrale de Poisson et incite à compléter la formule intégrale de Cauchy qui, elle, ne suffit pas à la détermination effective d'une $f(z)$ par ses valeurs sur un contour C , car on ne sait pas, en se donnant ces valeurs, si elles définissent une $f(z)$ holomorphe dans C , cette holomorphie étant nécessaire pour la validité de la dite formule intégrale de Cauchy.

Mais la recherche d'une extension convenable ramène aux représentations conformes dans le domaine uniforme, donc aux fonctions uniformes telles que la fonction modulaire laquelle devient, à son tour, l'instrument d'étude des fonctions uniformes quelconques dans le domaine d'un point essentiel. C'est le théorème de M. Emile Picard avec lequel on termine en beauté sans jamais perdre le contact avec l'Ecole française.

Donc l'ouvrage fait beaucoup pour la France et pour la Chine. Quoique

rédigé en anglais, il n'a pas l'apparence des ouvrages anglais ou américains; il est chinois. Sur les rayons d'une bibliothèque, sa reliure éclatante ne cessera d'attirer l'attention. Il en sera encore de même quand on l'ouvrira et qu'on feuillettera toutes ces belles pages; c'est dans un style mathématique véritablement éclatant que se trouvera réalisée la liaison entre les théories analytiques de la fin du siècle précédent et celles qui aujourd'hui sont plus avancées mais assez souvent sans cet étincellement qui groupait de disciples autour de l'œuvre de Cauchy.

Beaucoup de problèmes à résoudre, d'exercices en tous genres intimement mêlés au texte, cette remarque s'appliquant aussi au volume précédent.

A. BUHL (Toulouse).

William Fogg Osgood. — **Mechanics.** — Un volume gr. in-8° de 495 pages et 157 figures, relié. Prix: \$5,00 U.S. New York, The Macmillan Company. 1937.

Troisième volume, cette fois d'aspect bien américain! Il n'est pas fréquent de voir un même auteur écrire deux grands ouvrages d'enseignement, l'un sur l'Analyse, l'autre sur la Mécanique. Ce peut être heureux pour nombre d'élèves qui, déjà formés par l'une des disciplines, trouveront particulièrement aisément de se former à l'autre.

Je serai ici un peu moins enthousiaste qu'en dissertant sur l'Analyse. Pour M. Osgood, la Mécanique est essentiellement science d'observation et il insiste même sur la notion de l'observation la plus vulgaire comme étant sans doute la plus utile. La balle de tennis, l'équilibre à bicyclette, l'automobile, à commencer par de bons vieux modèles particulièrement instructifs, tels sont quelques éléments du champ d'opération dans lequel on apprend vraiment la Mécanique. Et ce n'est — je n'exagère pas — que lorsqu'on a vraiment cela dans la chair, dans le sang, qu'on est prêt pour l'étude des équilibres et des mouvements. Il est bien certain que l'homme ainsi formé pourra faire un excellent ingénieur mais, hélas, pour peu que cet ingénieur ait des loisirs en dehors de ses occupations strictement professionnelles, il nous donnera, quelque beau jour, une théorie universelle, astronomique ou microcosmique où tout l'Univers sera jugé et interprété à la manière d'une usine. L'immédiat « autour de lui » sera extrapolé dans tous les domaines.

Mais, oublions le danger de ces extrapolations fantaisistes. Il est certain que les procédés avec lesquels M. Osgood vit la Mécanique sont tout simplement magnifiques, d'une magnificence que les choses vulgaires n'ont pas forcément et peut-être arrive-t-il ainsi à idéaliser la Science beaucoup plus qu'il n'en convient.

Ses problèmes, pour commencer par nombre d'exemples vulgaires, sont amusants et peuvent déconcerter des gens déjà très habitués aux équations. Une oie (p. 125) repose dans une volière bien close et placée sur un plateau de bascule. Cette oie s'envole. Que va indiquer la bascule? Pourquoi une oie (goose)? L'expérience serait plus facilement réalisable avec un oiseau plus petit. De même, sur un plateau de balance se trouve un seau d'eau en lequel est immergé un bouchon de liège par l'effet d'un lien qui l'attache au fond du seau. Le lien se rompt. Effet sur l'équilibre initial?

Cet esprit se poursuit inlassablement. Il devient particulièrement ingénieux en cinématique; là le lecteur se sent devenir constructeur de tout un appareillage du genre mécano. On ne peut critiquer le procédé

pédagogique car il est bien connu que beaucoup d'enfants prennent goût à la Mécanique en manipulant de tels jouets. Poursuivre l'idée, ramener l'adolescent et même l'homme à une sorte de bon sens élémentaire et juvénile et le faire avec une étourdissante virtuosité, voilà, à coup sûr, ce qui ne manque point d'intérêt.

L'Analyse accompagne tout ceci et s'élève jusqu'aux équations de Lagrange suivies bientôt des équations canoniques pour lesquelles l'auteur invoque la notion de transformations de contact; peu importe l'expression qui, en fait, désigne les transformations conservant la forme canonique et dont Henri Poincaré fit un si grand usage. Et nous voici au seuil de recherches modernes, au Principe d'Hamilton, aux principes variationnels qui peuvent servir de base aux énergétiques nouvelles; ce simple bon sens commence tout de même à demander des compléments et M. Osgood ne dit pas qu'il faut les lui refuser. Mais vraiment il aura mis le plus grand des talents à en tirer tout ce qu'il est humainement possible d'en tirer.

Notons aussi, avec le plus grand empressement, que l'œuvre se réclame de celle de Paul Appell. Rien ne saurait mieux prôner ses grandes qualités intuitives.

A. EUHL (Toulouse).

Friedrich SCHILLING. — **Pseudosphärische, Hyperbolisch-sphärische und Elliptisch-sphärische Geometrie.** — Un volume gr. in-8° de VIII-240 pages et 114 figures, relié. Prix: RM. 16; pour l'étranger, RM. 12. B.G. Teubner, Leipzig et Berlin, 1937.

L'auteur ne nous surprend pas; il est un merveilleux intuitif de la Géométrie non euclidienne ayant déjà publié une *Projektive und nicht-euklidische Geometrie*, 1931, en deux volumes (dont nous ne trouvons point trace en nos articles bibliographiques, ce que nous regrettons) et un autre ouvrage sur *Die Pseudosphäre und die nichteuklidische Geometrie*, 1935, déjà signalé ici (34, 1935, p. 300).

Il reprend le sujet par d'autres voies, comme il le dit lui-même, et vraiment il réalise ainsi une sorte de miracle. On a vite fait de dire que la Géométrie, à deux dimensions, de Lobatchewsky, se réalise sur la pseudosphère. Ici, on est censé n'en rien savoir; la pseudosphère, surface de révolution à tractrice méridienne, est étudiée d'abord avec l'esprit de la Théorie des surfaces; ses géodésiques ont notamment les propriétés les plus élégantes, propriétés visibles, tangibles, ainsi que peuvent en faire foi les nombreuses figures qui illustrent le texte. Et alors, tout naturellement, se dégage l'esprit d'une géométrie analogue à la géométrie euclidienne mais avec un postulat de moins.

De grands esprits, ayant laissé d'excellents travaux scientifiques, ont semblé croire que les figures non euclidiennes n'étaient qu'une abstraction, qu'elles ne pouvaient être construites; avec quel talent M. Fr. Schilling prouve le contraire. Il examine la géométrie générale des droites et des coniques, avec propriétés harmoniques et anharmoniques, et lui trouve, sur la pseudosphère, une correspondance que personne ne mettait logiquement en doute mais qui est ici *tracée*. Il a, dès lors, pleinement raison quand il nous parle des «miracles» de la Géométrie non euclidienne.

Plus loin, il lui faut avoir recours à des sphères imaginaires. Cette fois, l'intuition va, sans doute, tomber en défaut. Nullement. On essaiera et l'on parviendra à reconnaître sur des hyperboïdes les propriétés sphériques

en question. Finalement, tous les groupes non euclidiens auront quelque image réelle interprétant toutes les finesse de leur structure analytique.

Remarquons surtout, sur la pseudosphère, la Théorie des cercles géodésiques et la Trigonométrie pseudosphérique. Naturellement les transformations les plus simples sont des *mouvements*. Les nécessités de mesurer, pour combiner angles et distances, jouent également un rôle fondamental; en approfondissant le concept de *mesure*, on en arrive à la discussion de tout ce qui est *mesurable*. C'est pourquoi les géométries généralisées sont devenues le substratum des théories physiques nouvelles. Les auteurs qui le font comprendre, aussi bien et avec autant d'art que M. Schilling, sont rares.

A. BUHL (Toulouse).

Robert SAUER. — **Projektive Liniengeometrie** (Göschen's Lehrbücherei,

1. Gruppe, Band 23). — Un volume gr. in-8° de 194 pages et 36 figures, relié. Prix: RM. 9. Walter de Gruyter & Co. Berlin W 35 et Leipzig, 1937.

Encore un très beau volume qui se réclame, comme le précédent, de la géométrie tangible et visible plutôt que d'une analyse qui ne sera développée qu'ensuite. Le sujet n'est pas nouveau. Pour les Français, il remonte à Gaston Darboux et plus particulièrement encore à Gabriel Koenigs. Il y a deux ans, nous avons analysé ici (34, 1935, p. 126) une œuvre fort analogue due à Ernst August Weiss, œuvre qui se réclamait surtout des idées de Study et de la notion de complexe, ceci, rappelons-le, avec une très grande élégance.

M. Robert Sauer nous indique, dès le début de son exposition, qu'il s'agit de géométrie projective à propos de données aussi peu spéciales que possible, ce qui apparaît tout de suite, dès la première figure, à propos de surfaces supportant des réseaux conjugués. Les tangentes aux courbes du réseau, le long d'une même courbe transversale lui appartenant aussi, doivent former une surface développable. L'analyse de telles possibilités ne va pas sans conditions d'intégrabilité dont profitent les systèmes d'équations différentielles. Autrefois les profits de ce genre n'ont point manqué avec lignes de courbure, lignes asymptotiques et plus généralement lignes conjuguées associées à l'indicatrice de Dupin. Nous avons maintenant bien davantage; la nouvelle géométrie projective, avec ses associations de droites et de plans, ses corrélations, ses collinéations, fait naître une analyse d'essence linéaire mais qui a bientôt ses moments, ses déterminants, ses matrices, ses tenseurs, bref tout l'arsenal des théories physico-géométriques actuelles. Elle est d'ailleurs propre à prendre diverses formes mécaniques, ce dont nombre de géomètres s'étaient aperçu depuis longtemps, au moins dans des cas particuliers comme celui des vis de R. S. Ball.

Il est bien difficile de dépeindre, en quelques mots, tout ce qu'il y a d'admirable dans la géométrie des systèmes de droites; on peut classer ces systèmes d'après les services qu'ils rendent, d'après les propriétés de courbure des surfaces qu'ils permettent d'étudier. C'est ici que l'on pourrait placer une théorie de surfaces de révolution à courbure négative, théorie qui s'accorderait fort esthétiquement avec les vues exposées dans l'ouvrage de M. Schilling précédemment analysé. Ce qui est aussi fort remarquable, dans le livre de M. Sauer, c'est l'exposition des calculs. Il ne s'agit nullement d'un calcul tensoriel avec débauche d'indices, encore que celui-ci ne soit nullement interdit en la matière, mais de calculs, parfois très numériques

qui sont d'une symétrie simple semblant toujours correspondre à la simplicité des schèmes projectifs. La droite serait alors un élément géométrique maniable comme le point, parfois comme la sphère, suivant une idée de Sophus Lie.

Parmi les grands auteurs, dont les créations reçoivent ainsi une vie nouvelle, mentionnons encore Bianchi, Bieberbach, Cayley, Cremona, Frenet, Fubini, Grassmann, E. Pascal, Plücker, Reye, Weingarten. Ces noms, cités dans le désordre alphabétique, se rapportent à des sujets fort divers mais entre lesquels la géométrie projective de l'auteur établit les liens les plus remarquables et les plus harmonieux.

A. BUHL (Toulouse).

René GARNIER. — **Leçons d'Algèbre et de Géométrie**, à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences. D'après la rédaction de M. Badrig Guéndjian. Tome III. Elimination. Eléments de Géométrie réglée. Transformation de Lie. Applications à la Géométrie conforme. — Un volume gr. in-8° de vi-280 pages et 106 figures. Prix: 80 francs. Gauthier-Villars. Paris, 1937.

C'est avec une chaude sympathie que nous avons suivi le développement de ce bel ouvrage. Les tomes précédents (voir *Ens. math.*, 35, 1936, p. 166) pouvaient sembler parfois un peu élémentaires non du fait de l'auteur mais de par les sujets qu'il s'astreignait à traiter et surtout à cause du public assez inexpérimenté auquel il s'adressait. Nous voici au tome III; le niveau s'est élevé graduellement et les contacts sont nombreux avec de récents ouvrages étrangers, notamment avec les deux dont l'analyse bibliographique précède. Mais ici nous trouvons des noms tels que ceux de MM. Cartan et Godeaux que les ouvrages allemands ignorent un peu trop, surtout quand il s'agit de Géométrie projective. Enfin mentionnons tout de suite que ce tome III ne semble nullement publié comme un tome III « et dernier ». L'ouvrage reste donc ouvert sur d'autres merveilles qu'on peut, au moins, pressentir.

Pour l'instant, nous débutons par l'élimination appuyée sur les fonctions symétriques. Le premier aboutissement remarquable est l'identité de Bezout $Af + Bg = 1$ autour de laquelle se groupent, dans l'espace comme dans le plan, des questions de dénombrement de points d'intersection ou d'éléments communs, questions qui constituent la Géométrie énumérative (abzählende Geometrie).

Les lieux géométriques suivent, leur place logique étant après l'élimination. Mais ceci n'empêche pas M. Garnier de commencer par des cas très simples, de revenir sur les cylindres, les cônes, les conoïdes, les surfaces de révolution, sans oublier les petites malices relatives à la surface d'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3 .$$

La très belle géométrie commence avec les coordonnées plückériennes; c'est tout de suite la symétrie matricielle des théories modernes aussi bien physiques que géométriques. Les complexes, tant travaillés à l'étranger, rappellent cependant, surtout par le complexe linéaire, les travaux d'extrême jeunesse de Paul Appell et de M. Emile Picard. Il y a là une géométrie d'éléments conjugués, tout comme pour les quadriques.

Rappelons encore que les *coordonnées kleinéennes* d'une droite quelconque sont au nombre de six et qu'elles sont liées par la relation

$$\pi_1^2 + \pi_2^2 + \pi_3^2 + \pi_4^2 + \pi_5^2 + \pi_6^2 = 0.$$

C'est une hypersphère à six dimensions, de rayon nul, sur laquelle il est loisible d'interpréter la géométrie de la droite. Les complexes peuvent former des faisceaux; le lieu de leurs axes conduit au *conoïde de Plücker* ou *cylindroïde*. La surface réglée du troisième ordre peut dégénérer en *surface de Cayley*; la *surface de Kummer* est une surface du quatrième ordre aussi riche que possible en singularités isolées.

Le complexe tétraédral, ou complexe de Reye, est celui des droites perçant les faces d'un tétraèdre en quatre points de rapport anharmonique constant. Cette définition est remarquable à cause des très nombreuses transformations qu'on peut lui faire subir; ceci d'autant plus qu'il existe maintenant toute une géométrie du tétraèdre.

Mais laissons les homographies et les corrélations de la Géométrie projective proprement dite. Il est naturel de faire succéder à celle-ci une géométrie dont l'élément est la sphère, car une sphère, comme une droite, se détermine par quatre conditions. De cette remarque il n'y a qu'un pas à faire pour atteindre la transformation de Lie qui change les droites en sphères. Le monde des sphères connaît de merveilleuses configurations à étudier en coordonnées pentasphériques; on aborde le monde *conforme*. Les substitutions orthogonales, en coordonnées pentasphériques, conduisent aux transformations de contact conservant les lignes de courbure; au fond de tout ceci, il n'y a que rotations, homothéties, inversions, mais voilà qui suffit aux homographies complexes dont les groupes fuchsiens et kleinéens sont des cas particuliers.

Nous ne pouvons détailler davantage. La fin du livre est d'une magnifique esthétique, grâce à des développements matriciels explicites, ayant une signification immédiate qu'on trouve rarement en Physique théorique. Cette fin est évocatrice des plus grands souvenirs qui s'attachent au nom de Gaston Darboux.

A. BUHL (Toulouse).

Joseph Miller THOMAS. — **Differential Systems** (American Mathematical Society Colloquium Publications. Volume XXI). — Un volume gr. in-8° de x-120 pages, relié. Prix: \$2.00. American mathematical Society. New-York. 1937.

Cet ouvrage traite des systèmes différentiels à un point de vue qui fut surtout celui du géomètre français Riquier inspiré par des idées préliminaires, fécondes, quoique pas toujours exactes, dues à Méray. Mais, de toutes façons, le sujet était prodigieux; il est de ceux qui font le plus grand honneur à la Science française. Il a été poursuivi, en France même, par M. Janet.

Il s'agit, on le sait, d'étendre, aux systèmes différentiels, les propriétés des systèmes algébriques et ce en conservant des conceptions plutôt algébriques et formelles qu'en adoptant des conceptions analytiques. Non seulement la chose est possible mais elle peut même s'étendre, après coup, à des systèmes fonctionnels généralisant ceux à constitution simplement algébrique et différentielle. Une telle théorie a une valeur d'autant plus indéniable que cette valeur progresse avec les progrès de l'Algèbre;

c'est ainsi que l'auteur a pu s'inspirer de la *Moderne Algebra* (1930-31) de B.-L. van der Waerden. Il y a là, en effet, un ouvrage fondamental auquel on ne saurait trop rendre hommage. Mais, ceci dit, nous remarquerons aussi, avec le plus grand plaisir, qu'un ouvrage anglais sait mieux rendre hommage aux savants français que nombre d'ouvrages allemands.

Ici la liaison est établie avec les travaux d'Edouard Goursat et de M. Elie Cartan. Et cela peut se faire en partant de Pfaff et de Grassmann; les algorithmes de ces derniers dépassaient, de beaucoup, le domaine analytique et visaient un monde formel qui pouvait aussi être physique. L'Ausdehnungslehre, les formes de Pfaff pouvaient constituer un terrain d'accès au Calcul différentiel absolu et à la Gravifique; il en est de même, en principe, vis-à-vis de tout ce qui se peut résoudre en notations relatives à des transformations opératoires concernant l'étendue, ce dernier mot signifiant, aussi bien, étendue des domaines fonctionnels.

De telles généralités ont parfois le défaut de paraître par trop au-dessus des applications; l'auteur a songé à celles-ci à la fin de son livre, en montrant qu'il pouvait revenir vers les transformations des intégrales multiples c'est-à-dire à la multiplication extérieure, toutes bien suffisantes, pourrions-nous ajouter, pour parvenir aux équations de Maxwell et à la Gravifique. Aussi serait-ce encore un beau sujet d'études que de reprendre les généralités exposées pour les restreindre en vue de questions plus élémentaires déjà développées par des méthodes isolées. Et la brièveté de l'œuvre générale est faite pour tenter les chercheurs.

A. BUHL (Toulouse).

Tibor RADÓ. — **Subharmonic Functions** (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete herausgegeben von der Schrifleitung des « Zentralblatt für Mathematik ». Fünfter Band). — Un fascicule gr. in-8° de vi-56 pages. Prix: RM. 6.60. Julius Springer, Berlin. 1937.

Encore un sujet que certains pourraient croire nouveau. Il a cependant une intéressante histoire où interviennent les noms de F. Riesz, H. Poincaré, Perron, Remak, Hartogs, Nevanlinna. Pour nous, rappelons qu'il y a trois ans, nous avons analysé ici (33, 1934, p. 116) une *Etude des Fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point* due à M. Marcel Brelot, auteur d'ailleurs abondamment cité par M. Tibor Radó.

Il est assez malaisé de résumer, en quelques lignes, les idées essentielles de l'exposé, à cause de nombreuses délicatesses inégalitaires qui ne s'abrégent pas. On peut, comme le fait l'auteur au début de sa Préface, partir d'un tracé curviligne convexe qui, par définition, sera toujours sous un tracé rectiligne et sera dit alors *sous-linéaire*. De même que le tracé sous-linéaire est sous le segment *rectiligne* ou *linéaire*, la fonction sousharmonique est sous la fonction harmonique avec possibilité d'en approcher surtout par propriétés intégrales.

Mais, en dehors de propriétés d'approximation déjà très importantes, il y a de nombreuses propriétés exactes qui sont de nature sousharmonique. Ainsi certains potentiels, correspondant à des distributions de masses négatives, sont sousharmoniques. Les surfaces minima et d'autres, à courbure négative, relèvent de la sousharmonicité. Et même, il y a toute une représentation sousharmonique qui généralise la Théorie du potentiel newtonien. Ceci nous rappelle un excellent ouvrage, dû à Oliver Dimon Kellogg, encore analysé dans cette Revue (28, 1929, p. 334), ouvrage dont

nous avons dit le plus grand bien et qui se trouve avoir préparé les développements sousharmoniques d'aujourd'hui rien qu'en étudiant des potentiels. Les intégrales à utiliser dans tout ceci sont à considérer selon les sens généralisés de Lebesgue et de Stieltjes, si bien que l'exposé implique, à la fois, de puissantes généralisations de notions intégrales et de notions différentielles.

A. BUHL, (Toulouse).

Rudolf WEYRICH. — **Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen.** —

Un volume in-8° de vi-138 pages et 8 figures, relié. Prix: RM. 7.60; pour l'étranger RM. 5.70. B. G. Teubner. Leipzig et Berlin, 1937.

Un volume assez peu volumineux mais très dense et pouvant être considéré à deux points de vue. Pour le praticien, ce peut être une initiation très commode à l'emploi des fonctions de Bessel; pour le mathématicien pur ce peut être une de ces monographies fonctionnelles où, à propos de fonctions déterminées, on passe en revue toutes les finesse de la Théorie des fonctions. La fonction gamma, un peu usée maintenant, a joué longtemps un tel rôle; la fonction dzéta de Riemann est, à cet égard, une perfection. Mais vraiment, avec les fonctions de Bessel, telles qu'elles sont maniées par M. Weyrich, on peut s'instruire autant et d'ailleurs prendre contact avec les nouveautés de la Mécanique ondulatoire, lesquelles, en des cas particulièrement simples, ont besoin de fonctions cylindriques.

Le sujet se réclame d'abord des équations d'onde

$$\Delta_3 U = a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + b \frac{\partial U}{\partial t}, \quad \Delta_3 U + k^2 U = 0$$

où Δ_3 est le laplacien à trois variables x, y, z . On peut y satisfaire par ondes planes, par ondes sphériques puis précisément par ondes cylindriques à représentations intégrales simples. Remarquons, tout de suite, le nom de Hankel, mathématicien du siècle précédent, déjà bien éloigné de nous mais qui eût le génie des intégrales définies et des lacets; des méthodes modernes peuvent rajeunir son exposition mais sans y rien changer d'essentiel. Puis ce fut Sommerfeld, plus préoccupé du sens physique des choses. Tout ceci pour un sujet qui, du côté des équations différentielles, nous semble avoir son origine dans les travaux de Sturm et Liouville à peine nommés par l'auteur mais non totalement oubliés. Remercions.

Les ondes cylindriques semblent déjà procéder de curieuses manières de progresser; comme elles sont analytiques, il ne faut pas s'étonner si les propriétés de récurrence qui les concernent s'établissent surtout dans le domaine complexe. Les résultats fonctionnels, les relations avec la fonction gamma et la constante d'Euler donnent quelques pages particulièrement remarquables.

Hankel nous a encore donné des représentations asymptotiques poursuivies par Debye; toutefois ce n'est que le cas d'arguments et d'indices réels. Les méthodes approchées, pour la représentation des fonctions cylindriques, ne peuvent évidemment être considérées comme définitives; comment interdire la découverte de quelque approximation meilleure? En attendant nous allons aux résultats de Nicholson et Watson (1918) par une méthode intégrale due à Airy (1883). L'évolution de la Science a été minutieusement suivie.

Des représentations à la Poisson donnent encore d'intéressants calculs intégraux où interviennent les fonctions eulériennes. Le point de vue fonctionnel est tout aussi élégant. Les zéros des fonctions cylindriques donnent des décompositions, en produits infinis, conformes au théorème de Weierstrass. Des transformations, d'abord étudiées par Lommel, transforment les fonctions en litige en agissant d'abord sur l'équation différentielle qui les caractérise. Des propriétés limites curieuses apparaissent également par l'intervention de la formule de Stirling. Enfin des propriétés intégrales d'orthogonalité lient les méthodes de Sturm-Liouville à celles de Fourier.

Applications soigneusement traitées pour les vibrations transversales des cordes et des membranes, les ondes électromagnétiques et les modifications qu'un milieu peut leur imposer, la conductibilité thermique, la résistance à la rupture d'une colonne verticale. Nous regretterons un peu l'absence de considérations de Mécanique céleste, les fonctions de Bessel jouant un rôle fondamental dans le développement de la fonction perturbatrice, rôle qui apparaît immédiatement dans Tisserand et qui a été étendu par Poincaré. Mais en jugeant le livre, suivant nos habitudes, sur ce qu'il contient, nous pouvons le présenter comme une œuvre simple due à un analyste très habile.

A. BUHL (Toulouse).

Actualités scientifiques. — Fascicules gr. in-8° avec figures et planches, se vendant séparément à prix divers. Hermann & Cie, Paris.

441. — M. LAVRENTIEFF. *Sur les fonctions d'une variable complexe représentables par des séries de polynômes* (Théorie des Fonctions. Direction Paul Montel. 64 pages, 1936. Prix: 15 francs). — Il s'agit de construire des séries de polynômes à variables complexes en employant des procédés analogues à ceux introduits par René Baire dans le domaine réel. Grands emprunts aux idées de M. Paul Montel sur les familles de fonctions, ce qui est en rapport direct avec l'Analyse fonctionnelle. Plus précisément le « Problème de M. Montel » est la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction $f(z)$ définie dans un certain domaine soit la somme d'une série de polynômes. On atteint, d'une façon relativement aisée, des résultats tels que ceux obtenus autrefois par Mittag-Leffler et Painlevé mais sans donner le rôle primordial aux méthodes intégrales à la Cauchy. Contours et lacets ont fait place à des figures plus étranges mais plus directement venues sur le terrain génératuer. Empruntons encore, à la Bibliographie, les noms de Fatou, Hartogs, Hilbert, Julia, Keldych, Lusin, Osgood, Ostrowski, Rosenthal, Privaloff, Riesz, Runge, Walsch.

451. — Arnaud DENJOY. *Introduction à la Théorie des Fonctions de variables réelles*. Première partie. Aperçu historique. Géométrie des ensembles cartésiens. Fonctions. Continuité et convergence. Dérivation (Ensembles et Fonctions. Direction Arnaud Denjoy. 58 pages, 1937. Prix: 12 francs). — Fascicule absolument merveilleux qui devait faire partie d'une œuvre pour gens du monde, qui conserve encore, en partie, ce caractère mais qui a été complété pour le public mathématique. Les fonctions de variables réelles révèlent une prodigieuse esthétique au moins égale à celle des fonctions analytiques. Le non-analytique n'est pas moins utile; la notion de dérivée est physiquement fausse (*sic*).

Il a fallu discriminer la continuité, la dérivabilité, l'aptitude au développement taylorien.

Le théorème fondamental de René Baire sur le développement en série de fonctions continues est « un monument éternel qui ne cessera de dominer, toujours de plus haut, les avenues de l'Analyse ». Et Baire est mort misérable ! Voir *L'Enseignement mathématique*, 31, 1932, p. 5.

Le reste de l'exposition associe au nom de Baire ceux de MM. Borel et Lebesgue. Celui de M. Denjoy apparaît, trop modestement peut-être. Beaucoup de belles choses aussi sur l'approximation considérée comme « effet de l'art ». L'artiste, en effet, ne reproduit pas le réel; il le simplifie et l'interprète.

452. — Arnaud DENJOY. *Introduction à la Théorie des Fonctions de variables réelles*. Deuxième partie. Intégration. Séries trigonométriques. Fonctions quasi-analytiques. Fonctionnelles et Fonctions d'ensemble. (Ensembles et Fonctions. Direction Arnaud Denjoy. 60 pages, 1937. Prix: 12 francs.) — La merveille continue. D'abord avec l'intégration pour laquelle je pourrais répéter ce que j'ai dit, plus haut, au sujet des ouvrages Saks et Kestelman, mais en accordant au résumé de M. Denjoy le bénéfice de la plus lumineuse brièveté. D'ailleurs l'intégration est, tout de suite, de nature paramétrique; elle définit, par exemple, $F(x, y)$ par une intégrale à élément $f(s) \varphi(s, x, y) ds$. De là, très naturellement, les aperçus sur les séries trigonométriques, leurs généralisations par fonctions orthogonales et le domaine quasi-analytique. Il est naturel aussi de signaler la *totalisation* de Denjoy avec dérivée non sommable.

Il y a deux quasi-analyticités selon Borel, Denjoy, Carleman et selon Bernstein. La première rompt avec la série de Taylor; la seconde aussi mais avec considération d'approximations polynomiales.

Les problèmes fondamentaux de l'Analyse fonctionnelle mènent tout de suite aux équations intégrales. Les fonctions d'ensemble ramènent aux intégrales selon Stieltjes.

Les deux fascicules forment une introduction incomparablement simple à tous les ouvrages, parfois bien touffus, qui s'occupent de l'Analyse réelle.

548. — G. BOULIGAND. *Structure des Théories. Problèmes infinis*. Préface de M. Abel Rey. (Histoire et Philosophie des Sciences. Direction Abel Rey. 60 pages. 1937. Prix: 12 francs.) — Les sciences sont des pensées qui s'harmonisent à l'intérieur d'une pensée générale, dit M. Abel Rey, dans sa Préface. Il faut, en effet, ne pas craindre les généralités pour atteindre aujourd'hui à une harmonie qui se fait fuyante à tant d'égards. M. Brouwer s'est fait une conception nouvelle du vrai et du faux; le principe du tiers exclu est loin d'être intangible. On revient sur la « Crise des Mathématiques » dont il a été précisément question dans *L'Enseignement mathématique* (34, 1935, pp. 6-7 et 12-17).

M. Bouligand utilise la Théorie des Surfaces, va de l'axiomatique de Riemann aux conceptions à la Lebesgue. La proposition de groupe vient s'offrir sans le moindre effort d'initiation; c'est sans doute la manière la plus simple de concevoir les domaines de causalité. Dans l'un de ceux-ci, le théorème de Meusnier appartient plus à la théorie des ensembles qu'à la géométrie des surfaces.

Il y a des remarques analogues sur le domaine de causalité commun à

la dynamique et à l'électromagnétisme. Un chapitre sur le transfini nous ramène à des idées de Poincaré, Baire, Denjoy. Personnellement je trouve qu'on est insuffisamment reconnaissant envers le transfini. On cherche à se passer de lui, justement quand il a démontré quelque chose. Mais, parmi beaucoup d'autres points intéressants, M. Bouligand nous donne des explications de cette apparente ingratitudo. A. BUHL (Toulouse).

J. LEMAIRE. — **Exercices de Géométrie moderne** à l'usage des élèves de Mathématiques spéciales et des Candidats à l'Agrégation. — Un volume in-8° (22 × 14) de vi-170 pages avec nombreuses figures. Prix: 30 francs. Vuibert, Paris, 1937.

Bien qu'il existe d'excellents recueils de problèmes de géométrie analytique, tels que ceux de Mosnat, d'Aubert et Papelier, on a pensé qu'un Recueil de solutions de caractère plus géométrique pourrait être utile aux Etudiants de mathématiques, d'où l'idée de publier les solutions des questions proposées dans les *Compléments de Géométrie moderne* dus à Charles Michel.

Tous les amateurs de géométrie, professeurs et élèves, connaissent le beau livre de Michel, qui est venu compléter si heureusement celui de Duporcq, et chacun souscrit à cet éloge qu'en fit M. Chenevier à la distribution des prix du Concours général de 1936: « Son dernier ouvrage, paru en 1926, sous le nom modeste de *Compléments de Géométrie moderne*, contient le résultat du labeur de toute une vie. Heureux les étudiants à venir qui pourront trouver là des renseignements qu'il fallait chercher auparavant dans cent mémoires différents et qui apparaissaient épars, incomplets, non reliés entre eux ! Ils sont maintenant présentés d'une manière impeccable, avec un style sobre, nourri de faits, accompagnés de propriétés diverses, de conséquences nombreuses, groupées de main de maître. »

Les questions traitées sont de difficultés très diverses. On s'est efforcé de varier les méthodes employées à les résoudre, donnant tantôt la préférence à des procédés peut-être un peu longs, mais élémentaires, ayant d'ailleurs recours au mode de représentation de la géométrie descriptive.

Le lecteur appréciera hautement les notes et solutions dont M. Harmegnies, Répétiteur à l'Ecole polytechnique, a bien voulu enrichir ce petit livre, ainsi que celles qui sont dues à M. Labrousse.

Il est bien difficile d'entrer dans les détails. Que de passages seraient dignes d'être reproduits. Disons seulement que M. Lemaire, auteur de *Hypo* et *Epicycloïdes*, retrouve ces courbes en nombre d'endroits, par exemple à propos de surfaces et de courbes algébriques, notamment de biquadratiques gauches. Quant aux figures, elles ont ce cachet de clarté qui invite à la compréhension immédiate. A. BUHL (Toulouse).

J. DOLLON. — **Problèmes d'Agrégation** (Mathématiques spéciales). — Un volume in-8° (22 × 14) de vi-212 pages avec figures. Prix: 40 francs. Vuibert, Paris, 1937.

M. Dollon a déjà publié des *Problèmes d'Agrégation* représentant les compositions de Mathématiques élémentaires. Voir *L'Enseignement mathématique*, 30, 1931, p. 314.

Le présent livre vaut son aîné et il est curieux de voir ainsi donner un

caractère didactique, très homogène, à une collection de questions parfois assez disparates. Il va de 1919 à 1936 en reprenant, de plus, le problème de 1912. Il demande certainement le minimum d'érudition. Les meilleurs élèves des Facultés et des Classes de Mathématiques spéciales étudieront avec fruit ces énoncés si suggestifs.

Il faut recommander, comme complément indispensable de l'étude, l'opuscule de M. Georges Bouligand sur le *Complexe quadratique* et les *Compléments de Géométrie moderne* de Charles Michel. Tout à l'heure, à propos des *Exercices* de M. J. Lemaire, un éloge de Charles Michel intervenait déjà. Cet éloge apparaît, de plus en plus, comme bien mérité, le Professeur Michel ayant toujours été doublé d'un géomètre profond et fin. M. Dollon, et d'ailleurs M. Lemaire, l'ont heureusement imité et prolongé.

A. BUHL (Toulouse).

Sophus LIE. — **Gesammelte Abhandlungen.** Auf Grund einer Bewilligung aus dem norwegischen Forschungsfonds von 1919 und mit Unterstützung der Videnskapsakademie zu Oslo und der Akademie der Wissenschaften zu Leipzig hrsg. von dem Norwegischen Mathematischen Verein durch Fr. ENGEL (Giessen) und P. HEEGAARD (Oslo). — Zweiter Band, II. Teil (mit einem Bildnis): *Geometrische Abhandlungen*, Zweite Abteilung. Un vol. in-8° de ix-331 pages. — *Anmerkungen zum zweiten Bande*. Un vol. in-8° de 173 pages; B. G. Teubner, Leipzig, et H. Achehoug & Cie, Oslo, 1937.

Ce volume contient la suite des belles et importantes recherches de Sophus Lie sur les surfaces de translation et sur les transformations de contact. On y trouve en outre une courte Note sur le rôle assez peu connu d'un précurseur norvégien de la théorie des nombres complexes, Caspar Wessel, qui, en 1796, présenta à la Société danoise des Sciences un mémoire sur la représentation géométrique des imaginaires.

C'est par ce volume que se termine la publication des Mémoires scientifiques du grand géomètre norvégien poursuivie avec autant de soin que de dévouement par MM. Fr. Engel, professeur à l'Université de Giessen, et P. Heegaard, professeur à l'Université d'Oslo. Entreprise par la Société mathématique de Norvège, elle a bénéficié de l'appui financier du Fonds national de recherches de Norvège et des Académies des sciences d'Oslo et de Leipzig.

Les Mémoires scientifiques de Lie (1842-1899) ont été groupés et répartis en six volumes; les tomes I et II consacrés à la Géométrie, les tomes III et IV aux équations différentielles et les tomes V et VI aux groupes de transformations. Chaque volume est accompagné d'un Appendice, cartonné à part, contenant des annotations, éclaircissements et remarques destinés à faciliter l'étude des mémoires. On y trouve aussi d'intéressants rapprochements avec des travaux d'autres mathématiciens ainsi que des extraits de la correspondance de Lie.

H. FEHR.

R. ROTHE. — **Höhere Mathematik für Mathematiker, Physiker und Ingenieure.**

I. Bd. Differentialrechnung und Grundformeln der Integralrechnung nebst Anwendungen. 4. Aufl. Mit 161 Fig., RM. 5.40 (avec une réduction de 25% pour l'étranger).

- II. Bd. Integralrechnung, Unendliche Reihen, Vektorrechnung nebst Anwendungen. 2. Aufl. Mit 99 Fig.; RM. 5.80 (avec une réduction de 25% pour l'étranger).
- III. Bd. Raumkurven u. Flächen, Linienintegrale u. mehrf. Integrale, gewöhnl. u. partielle Differentialgleich. nebst Anwendungen. Mit 170 Fig.; RM. 6.60 (avec une réduction de 25% pour l'étranger).
- IV. Bd. Übungsaufgaben mit Lösungen. Formelsammlung. Unt. Mitw. v. O. Degosang. In 6 Heften. 1. u. 2. Heft zu Teil I. / 3. u. 4. Heft zu Teil II. / 5. u. 6. Heft zu Teil III (RM. 2 à 2,40 le fascicule) (avec une réduction de 25% pour l'étranger).

Verlag. B. G. Teubner, Leipzig u. Berlin.

Nous venons de recevoir les fascicules 5 et 6 du tome IV du Traité de Mathématiques supérieures rédigé par M. R. Rothe, professeur à l'Ecole technique supérieure de Berlin. Ils contiennent les exercices et applications du tome III.

Maintenant que l'ouvrage est complet, on peut se faire une idée de sa portée. C'est, à l'heure actuelle, le meilleur traité de Mathématiques générales de langue allemande à l'usage des étudiants des premiers semestres des Facultés des Sciences et des Ecoles techniques supérieures. Il renferme les chapitres essentiels de ce que doit acquérir celui qui désire avoir la culture mathématique indispensable au physicien et à l'ingénieur.

La partie théorique est répartie sur les trois premiers volumes: *Tome I*, Calcul différentiel. Introduction au Calcul intégral. Applications. — *Tome II*, Calcul intégral. Séries. Calcul vectoriel. Applications. — *Tome III*, Courbes gauches et surfaces. Intégrales curvilignes et intégrales multiples. Equations différentielles ordinaires et aux dérivées partielles. Applications.

Le *Tome IV* est réservé aux exercices, problèmes et applications. Il comprend six fascicules en vente séparément. Les deux premiers se rattachent au Tome I, les deux suivants au Tome II et les deux derniers au Tome III. Leur ensemble constitue un excellent recueil d'exercices.

Démonstrations rigoureuses sans développements inutiles dans un cours de mathématiques générales, exposition claire et concise, vues générales sur les différentes branches des Mathématiques pures et appliquées, choix judicieux des exercices et des problèmes, telles sont les caractéristiques de cet ouvrage.

H. FEHR.

Beppo Levi. — Analisi Matematica, Algebrica ed Infinitesimale. — Un vol. in-8° de 541 pages; L. 80. — Nicola Zanichelli editore, Bologne, 1937.

Dans les Facultés des sciences des Universités italiennes le cours biennal d'Analyse algébrique et infinitésimale figure en tête des cours fondamentaux que reçoivent les étudiants des deux premières années. Il fait partie de l'enseignement mathématique commun aux sections mathématiques, physique, mathématiques et physique et comprenant en outre la Géométrie analytique, la Géométrie projective et descriptive, la Mécanique rationnelle.

Le présent volume correspond, avec quelques développements, aux leçons que professe M. Beppo Levi à l'Université de Bologne. La partie algébrique comprend l'étude des propriétés des polynomes, des déterminants, des systèmes d'équations linéaires, de la résolution des équations algébriques,

des opérations vectorielles, des séries, etc. Puis viennent les notions fondamentales du Calcul différentiel et intégral.

A. SPEISER. — **Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung**, mit Anwendungen auf algebraische Zahlen und Gleichungen sowie auf die Krystallographie. (Die Grundlehren der Math. Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. V.) Dritte Auflage. — Un vol. in-8° de x-262 pages, avec 41 figures, broché; RM. 15.—; Julius Springer, Berlin, 1937.

La première édition de cet ouvrage remonte à l'année 1922; elle a été analysée par M. Pólya (v. *L'Ens. math.*, 23^e année, p. 234-35). La deuxième édition, remaniée et complétée, est de 1927.

A l'occasion de cette nouvelle édition, il nous suffira de rappeler que le savant professeur de l'Université de Zurich a réuni dans ce volume les parties essentielles de la théorie des groupes finis: Théorèmes de Jordan et de Hölder, de Sylow et de Frobenius, représentation des groupes par des permutations, représentation des groupes finis par des substitutions linéaires, etc.; application à la théorie de la résolution des équations algébriques. Mentionnons aussi les applications à l'étude de la symétrie cristalline et les intéressantes remarques quant à l'interprétation de la théorie des groupes dans les dessins d'ornements.

H. F.

W. LIETZMANN. — **Der Pythagoreische Lehrsatz**. Fünfte Auflage. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Reihe I, Bd. 3) — Un fasc. in-16 de 42 p. et 39 fig.; cart., prix pour l'étranger, RM. 0.90.

W. LIETZMANN. — **Von der Pythagoreischen Gleichung zum Fermat'schen Problem**. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Reihe I.) Bd. 91. — Fünfte umgearbeitete Auflage des zweiten Teiles von « Der Pythagoreische Lehrsatz ». Un fasc. in-16 de 48 p. et 17 figures; cart.: prix pour l'étranger: RM. 0,90; B. G. Teubner, Leipzig et Berlin, 1937.

W. LIETZMANN und V. TRIER. — **Wo steckt der Fehler ?** Mathematische Täuschungen und Fehler. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Reihe I, Bd. 52.) Vierte, umgearbeitete Auflage. — Un vol. in-16 de 52 pages et 38 figures; prix pour l'étranger, RM. 0,90; B. G. Teubner, Leipzig et Berlin, 1937.

La collection que publie la Maison Teubner sous le titre « Mathematisch-physikalische Bibliothek, herausgegeben von W. Lietzmann und A. Witting » et qui compte aujourd'hui près de 100 petits volumes a largement contribué à éveiller l'intérêt pour les Mathématiques non seulement chez les élèves des écoles secondaires supérieures, mais aussi dans le grand public.

L'un des premiers de la série est celui que M. Lietzmann consacre à l'historique et aux différentes démonstrations du théorème de Pythagore. Pour cette nouvelle édition, la cinquième, l'auteur a réparti son exposé sur deux volumes. Les additions portent principalement sur les nombres de Pythagore et le problème de Fermat.

Le volume intitulé « Wo steckt der Fehler ? » (où est l'erreur ?) qui vient de paraître en quatrième édition, attire l'attention du lecteur sur certaines erreurs d'appréciation, sur des fautes de raisonnement dans les démonstrations géométriques ou dans les calculs algébriques, etc. Mais c'est au lecteur à découvrir le point faible.

H. F.

L. GODEAUX. — **Les Géométries.** (Collection Armand Colin, Section de Mathématiques). — Un vol. in-16 de 215 pages et 36 figures, broché: Fr. 15,—; Librairie Armand Colin, Paris 1937.

L'auteur trace à grands traits un tableau de l'évolution de la Géométrie. Après avoir rappelé les découvertes des géomètres grecs, il donne un aperçu du développement de la Géométrie. Puis il montre ce que nous devons aux travaux de Descartes, Fermat, Desargues, Pascal et Poncelet. L'exposé des méthodes nouvelles conduit le lecteur aux concepts de Géométrie basée sur la notion de groupe de transformations, idée si féconde que l'on s'efforce aujourd'hui d'introduire en Physique théorique. L'ouvrage se termine par un chapitre sur la Topologie.

Le livre de M. Godeaux rendra de grands services aux étudiants; et, comme il a le mérite de traiter simplement les questions, parfois ardues, qu'il aborde, il sera très recherché de tous ceux qui, sans être mathématiciens, sont curieux de connaître les idées qui guident les géomètres dans leurs recherches actuelles.

L. LOCHER. — **Urphänomene.** Erster Teil. — Un vol. in-8° de 164 pages avec 173 figures, relié toile: Fr. 6,—; Orell Füssli, Zurich et Leipzig, 1937.

L'exposé de M. Locher permet de constater que, grâce à leur élégance et à leur simplicité, les propriétés de la Géométrie projective se prêtent tout particulièrement à des conférences destinées à éveiller l'intérêt pour la Géométrie. L'auteur estime avec raison qu'il existe dans le grand public bon nombre de personnes qui désirent connaître, pour autant qu'ils leur sont rendus accessibles, les concepts qui sont à la base des Mathématiques, les phénomènes primitifs, « Urphänomene » selon le mot de Goethe dans ses « Sprüche in Prosa ».

Voici le sommaire du premier volume:

Vorrede. — Einige geometrische Phänomene. — Die Grundelemente und Grundgebilde. — Die Phänomene der Verknüpfung. — Das Unendlichferne in der Geometrie. — Die einfachsten Figuren des Raumes und der Desargues'sche Satz. — Moebius. — Netze und der Fundamentalsatz. — Die Cassinischen Kurven. — Ausblicke.

H. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Livres nouveaux :

Abhandlungen der Fries'schen Schule. Begründet von G. HESSENBURG und L. NELSON. Herausgegeben von O. MEYERHOF, G. HERMANN und M. SPECHT. Sechster Band, 3. und 4. Heft. — Un vol. in-8° de 240 pages, broché, RM. 7,50. Verlag « Öffentliches Leben », Berlin, 1937.

Ce nouveau fascicule des *Abhandlungen der Fries'schen Schule* contient quatre mémoires sur des questions de Philosophie des Sciences. Les trois premiers correspondent aux conférences faites à Heidelberg en septembre 1936: Paul BERNAYS: Grundsätzliche Betrachtungen zur Erkenntnis-