Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 36 (1937)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Kapitel: Réunion de Genève, 28 août 1937.

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE SUISSE

Conférences et communications.

Réunion de Genève, 28 août 1937.

La Société mathématique suisse a tenu sa 27me assemblée annuelle à Genève, le 28 août 1937, sous la présidence de M. le Prof. R. WAVRE (Genève), en même temps que la 118me session annuelle de la Société helvétique des sciences naturelles.

Dans sa *séance administrative*, la Société a constitué comme suit son comité pour les années 1938 et 1939: MM. les Prof. W. SCHERRER (Berne), président, L. KOLLROS (Zurich), vice-président et P. BUCHNER (Bâle), secrétaire-trésorier.

La prochaine assemblée annuelle aura lieu à *Coire*.

La *partie scientifique* a été consacrée aux communications ci-après.

1. — André MERCIER (Copenhague). — *Matrices pouvant servir d'unités pour les nombres de Clifford.* — Les nombres de Clifford sont définis par leurs unités Γ_i qui satisfont aux conditions $\Gamma_i \Gamma_j + \Gamma_j \Gamma_i = 2\delta_{ij}$. On peut affirmer qu'il existe des objets mathématiques remplissant ces axiomes de définition, en formant certaines matrices dont la structure est rattachée à la métrique de l'espace des nombres de Clifford. Pour y arriver, il est indiqué de partir tout d'abord d'autres matrices que M. E. CARTAN a définies dans sa théorie des spineurs [1] et au moyen desquelles on peut former des nombres hypercomplexes en prenant pour unités les n matrices particulières de Cartan qui se rapportent aux n vecteurs coordonnés de l'espace, cet espace étant défini par une autre métrique. Nous appelons nombres de Cartan ces nombres hypercomplexes. Nous montrons comment on peut passer, grâce à un changement de coordonnées convenables, des matrices de Cartan à des matrices qui remplissent les conditions posées pour les Γ. Si l'on se rapporte alors à un mémoire de G. JUVET [2], où la théorie des spineurs est esquissée pour l'espace à quatre dimen-

---

[1] Cours professé à la Faculté des Sciences, Paris, 1935/36.

[2] G. JUVET, *Comm. Math. Helv.*, **8**, 264, 1936 et *C. R.*, **202**, 183 et 540, 1936.

sions et leur importance pour les opérations de rotation de cet espace mise en évidence, on constate que les relations grâce auxquelles Juvet définit ses *spineurs de base* ne sont rien d'autre que les relations inverses, dans un cas particulier, des relations qui font passer des unités des nombres de Cartan à celles des nombres de Clifford.

2. — E. Schubarth (Bâle). — *Sur les groupes linéaires normalement discontinus à deux variables complexes.* — Soit G un groupe infini discontinu de transformations T_i:

$$w' = \frac{a_i w + b_i z + c_i}{g_i w + h_i z + k_i}, \qquad z' = \frac{d_i w + e_i z + f_i}{g_i w + h_i z + k_i}$$

à deux variables complexes et à coefficients complexes, G ne contenant pas de transformations infinitésimales. Supposons l'espace $W(w, z)$ fermé par un plan analytique ε_∞. D'après M. Myrberg, le groupe G est appelé normalement discontinu (n. d.) dans le domaine A, si les transformations de G forment une famille normale dans chaque domaine fermé contenu dans A. Pour les groupes de plusieurs variables, la discontinuité normale entraîne la discontinuité propre; pour une seule variable, les deux notions sont équivalentes. Appelons groupe de première classe un groupe qui ne contient que des suites normales de transformations ayant une transformation limite de rang 1. En se bornant aux groupes de première classe, on arrive à une explication géométrique assez simple de la discontinuité normale, si l'on se sert de la dualité entre l'espace W des points et l'espace Ω des plans analytiques. *Pour que le groupe* G *soit n.d. au point* P, *il faut et il suffit que le groupe* Γ *engendré par* G *dans l'espace* Ω *soit proprement discontinu en chaque plan analytique* ε_P *passant par* P. Le déterminant fonctionnel de la transformation unimodulaire T_i est $D_i(w, z) = (g_i w + h_i z + k_i)^{-3}$; la « variété isométrique » Π_i: $| g_i w + h_i z + k_i | \equiv 1$ répartit les points de l'espace W en trois classes: l'intérieur, la nappe, l'extérieur de Π_i selon que $| D_i(w, z) | \lesseqgtr 1$. Π_i est une famille (à un paramètre) de plans analytiques passant par un seul point S_i situé sur ε_∞. Envisageons le domaine R contenant tous les points qui se trouvent, avec un voisinage entier, à l'extérieur de tous les Π_i du groupe. R existe à condition que G soit n.d. en un point Q de ε_∞. En admettant la condition analogue que Γ soit n.d. en un plan analytique ε_Q passant par Q (par exemple en ε_∞), on peut établir le théorème suivant, en désignant par N le domaine normal de G, à savoir l'ensemble des points en lesquels G est n.d.: R *est un domaine fondamental de* G *pour* N. La frontière de R est formée par des parties des Π_i. Les côtés à trois dimensions sont équivalents deux à deux et, à certaines conditions, les transformations correspondantes engendrent le groupe G. R étant

complété, d'une manière adéquate, par des points de sa frontière, R et les transformés de R recouvrent N simplement, ne laissant pas de lacunes. *Le domaine normal de* G, *de même que le domaine fondamental* R *de* G *pour* N, *est convexe par rapport aux plans analytiques.*

3. — Charles Blanc (Lausanne). — *Sur une méthode pour l'étude des surfaces de Riemann.* — Cette méthode a été exposée dans ma thèse (*Les surfaces de Riemann des fonctions méromorphes*, p. 50, ou aussi *Comm. math. helv.*, vol. 9, 1937, p. 357 et suiv.). Elle permet de construire des surfaces de Riemann simplement connexes, du type hyperbolique et peu ramifiées.

On peut donner, grâce à cette méthode, un exemple de surface de type hyperbolique ne possédant qu'*une* singularité transcendante, et un ensemble dénombrable de points critiques algébriques.

Considérons la fonction $w = -e^{-\zeta} + \zeta + 1$ dans le demi-plan $\Im\zeta \geqq 0$, et la fonction $w = e^{\zeta} + \zeta - 1$ dans le demi-plan $\Im\zeta \leqq 0$. Les deux surfaces de Riemann ainsi définies peuvent se souder le long de la droite $\Im w = 0$, et former ainsi une surface de Riemann F.

1. Cette surface est du type hyperbolique. Il suffit de considérer la relation H que fournit sa définition. Cette relation est du type hyperbolique (voir *loc. cit.*, p. 362).

2. F n'a qu'une singularité, pour $w = \infty$. Il suffit de montrer que dans le plan de ζ, il n'existe aucun chemin tendant vers l'infini, sur lequel $|w|$ reste borné. Un tel chemin devrait rester dans l'un des demi-plans $\Im\zeta > 0$ ou $\Im\zeta < 0$. Mais le minimum de $|w|$ sur le polygone de sommets $2k\pi(1+i)$, $2k\pi(-1+i)$, $2k\pi(-1-i)$, $2k\pi(1-i)$, tend vers l'infini si k croît indéfiniment. Il n'y a donc qu'une singularité transcendante, qui est à l'infini.

Les points critiques de F sont donnés par les zéros de la dérivée de w. On voit facilement qu'ils ont l'infini pour point d'accumulation.

Cet exemple paraît constituer la surface hyperbolique la moins ramifiée.

4. — Rud. Fueter (Zurich). — *Les singularités des fonctions régulières d'une variable quaternionienne.* — Les singularités des fonctions régulières à droite ou à gauche $f(z)$ d'une variable quaternionienne peuvent être étudiées d'une manière analogue aux fonctions analytiques ordinaires. On réussit à donner des développements en série autour de chaque point singulier, et à distinguer les points singuliers essentiels des points singuliers non essentiels. Les résultats sont les suivants:

1. *Point singulier isolé à distance finie.* Soit $z = 0$ un tel point; il est nommé point singulier non-essentiel, s'il existe un n pour lequel

$$|z^n f(z)|$$

reste borné pour toutes les valeurs $|z| \leqq r$.

2. La série autour d'un point isolé singulier conduit nécessairement à la définition du point ∞ régulier, et au développement autour du point singulier isolé ∞.

3. *Courbe singulière isolée.* On met, autour de chaque point de la courbe comme centre, l'hypersphère de rayon r. Soit R l'enveloppe de toutes ces sphères. La courbe est singulière isolée non-essentielle de $f(z)$, s'il existe un n pour lequel

$$|(z - c(t))^n f(z)|$$

reste borné sur R pour tout $r \leq r_0$; $c(t)$ est le point d'intersection de la courbe avec l'hyperplan normal passant par z.

4. *Surface singulière isolée* (à deux dimensions). Ce cas peut être traité de la même manière que le précédent et les résultats sont tout à fait analogues.

5. — R. Wavre. — *Sur une méthode pour obtenir des corps simples de même attraction.* — Notre étude sur les singularités des potentiels permet, par identification des singularités, d'obtenir de nouveaux exemples de corps de même attraction. La méthode se base sur les résultats suivants:

Lemme I. — Soit Ψ la fonction harmonique qui coïncide dans un domaine D connexe du point à l'infini avec un potentiel newtonien ou logarithmique créé par des masses situées à distance bornée. Si Ψ n'a pas de singularité à distance finie, elle est identiquement nulle. Cette proposition, immédiate pour le potentiel newtonien, se démontre aisément pour deux variables bien qu'un potentiel logarithmique ait en général une singularité à l'infini.

Lemme II. — Une fonction harmonique uniforme et bornée dans le voisinage d'un ensemble de points de capacité nulle est holomorphe sur cet ensemble.

Lemme III. — Des « corps analytiques » engendrent des potentiels qui sont des fonctions holomorphes se ramifiant autour des sommets, des extrémités (cas du plan) ou des arêtes et frontières (cas de l'espace) des corps envisagés. (Extension que nous avons donnée à des théorèmes de Stahl, Bruns, M. Hadamard et M. Schmidt.)

Lemme IV. — Les fonctions périodes pour des circuits fermés décrits autour des multiplicités de ramification sont égales à des sommes de fonction de passage p, p', p'', ... relatives aux corps attirants traversés par le circuit. Ces fonctions sont solutions de certains problèmes de Cauchy.

Théorème. — Si les fonctions de passage n'ont pas de singularité à distance finie et si les fonctions périodes sont identiquement nulles dans le domaine connexe du point à l'infini

$$p + p' + p'' + \ldots \equiv 0 , \qquad (1)$$

alors le potentiel lui-même sera identiquement nul dans ce domaine. Ce théorème résulte des lemmes précédents.

Appliquant cette méthode, un de nos élèves, M. Bilger, est parvenu à démontrer quelques propositions très suggestives telles que:

1° Les polygones inscrits (convexe et étoilés) réguliers, ayant les mêmes sommets, homogènes et de même masse totale engendrent le même potentiel dans le domaine connexe du point à l'infini;

2° Dans les mêmes conditions les surfaces polygonales homogènes engendrent le même potentiel;

3° Il en est de même encore pour certains polyèdres, notamment pour l'icosaèdre et son étoilé, pris en tant que surfaces ou en tant que volumes.

Pour ces corps l'équation (1) s'interprète dans un langage purement géométrique et donne lieu à un théorème simple que l'on ne trouve pas, à notre connaissance, dans les traités de géométrie élémentaire.

6. — Emile MARCHAND (Zurich). — *Probabilités dépendantes et probabilités indépendantes dans les phénomènes en rapport avec la durée de la vie humaine.* — Considérons trois collectivités A, B et C. Pour chacune d'elles, le point de départ est un nombre d'assurés l_ω, tous d'âge ω. Seule la cause I réduit le nombre des assurés de la collectivité A; seule la cause II — différente de I — réduit le nombre des assurés de la collectivité B, tandis que les deux causes I et II agissant simultanément réduisent le nombre des assurés de la collectivité C, à partir de cet âge ω.

Définissons par

$l^{\mathrm{I}}_{\omega+t}$ le nombre des assurés à l'âge $\omega + t$ que n'atteint pas la cause d'extinction I dans la collectivité A,

$l^{\mathrm{II}}_{\omega+t}$ le nombre des assurés à l'âge $\omega + t$ que n'atteint pas la cause d'extinction II dans la collectivité B,

$l^{\mathrm{I:II}}_{\omega+t}$ le nombre des assurés à l'âge $\omega + t$ que n'atteint ni la cause I, ni la cause II dans la collectivité C.

Le nombre des sinistrés $\mathrm{C}^{\mathrm{I}}_t$ par suite de la cause I dans la collectivité C, entre l'âge ω et $\omega + t$ est

$$\mathrm{C}^{\mathrm{I}}_t = \frac{-1}{l_\omega} \int_0^t l^{\mathrm{I}}_{\omega+y} \cdot dl^{\mathrm{II}}_{\omega+y} \,.$$

Le nombre des sinistrés $\mathrm{C}^{\mathrm{II}}_t$ par suite de la cause II dans la collectivité C, entre l'âge ω et $\omega + t$ est

$$\mathrm{C}^{\mathrm{II}}_t = \frac{-1}{l_\omega} \int_0^t l^{\mathrm{I}}_{\omega+y} \cdot dl^{\mathrm{II}}_{\omega+y}$$

d'où

$$l_{\omega+t}^{\mathrm{I:II}} = l_\omega - \mathrm{C}_t^{\mathrm{I}} - \mathrm{C}_t^{\mathrm{II}} = \frac{1}{l_\omega} \cdot l_{\omega+t}^{\mathrm{I}} \cdot l_{\omega+t}^{\mathrm{II}} \cdot$$

Les probabilités

$$\mathrm{Q}_t^{\mathrm{I}(e)} = \frac{\mathrm{C}_t^{\mathrm{I}}}{l_\omega} \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}_t^{\mathrm{II}(e)} = \frac{\mathrm{C}_t^{\mathrm{II}}}{l_\omega}$$

sont les probabilités expérimentales ou probabilités dépendantes d'extinction pour le temps t, tandis que les probabilités

$$\mathrm{Q}_t^{\mathrm{I}(i)} = \frac{l_\omega - l_{\omega+t}^{\mathrm{I}}}{l_\omega} \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}_t^{\mathrm{II}(i)} = \frac{l_\omega - l_{\omega+t}^{\mathrm{II}}}{l_\omega}$$

sont les probabilités indépendantes d'extinction pour le temps t.

L'actuaire ayant à déterminer, pour la collectivité C, où deux causes d'extinction I et II agissent simultanément, la probabilité qu'un assuré ne soit pas atteint pendant le temps t par l'une au moins des deux causes d'extinction, peut choisir entre les deux possibilités suivantes:

a) détermination directe des probabilités expérimentales d'extinction dans la collectivité C et calcul de la probabilité désirée par la formule

$$\frac{l_{\omega+t}^{\mathrm{I:II}}}{l_\omega} = 1 - \mathrm{Q}_t^{\mathrm{I}(e)} - \mathrm{Q}_t^{\mathrm{II}(e)} \ ;$$

b) détermination soit directe, soit *a priori* des probabilités indépendantes d'extinction dans deux collectivités distinctes A et B, et calcul de la probabilité désirée par la formule

$$\frac{l_{\omega+t}^{\mathrm{I:II}}}{l_\omega} = \left[1 - \mathrm{Q}_t^{\mathrm{I}(i)}\right]\left[1 - \mathrm{Q}_t^{\mathrm{II}(i)}\right] \text{[1]}.$$

Comme exemples de collectivité C, on peut indiquer:

une collectivité d'actifs; cause d'extinction	I: décès II: invalidité
une collectivité de célibataires; cause d'extinction	I: décès II: mariage
une collectivité de veufs; cause d'extinction	I: décès II: remariage.

[1] W. Friedli, Intensitätsfunktion und Zivilstand. 21me *Bulletin de l'Association des Actuaires suisses*, 1926.

La détermination directe des probabilités dépendantes ne présente pas de difficulté. Il n'en est pas de même des probabilités indépendantes. Il est pratiquement impossible d'avoir une collectivité B où l'invalidité, le mariage ou le remariage intervient seul et où la cause d'extinction: décès est éliminée. On peut en obtenir des valeurs approximatives, auxquelles nous avons donné le nom de probabilités corrigées [1].

La probabilité corrigée de l'arrivée d'un événement à la suite d'une cause bien déterminée (probabilité corrigée d'extinction) est égale au nombre des sinistres provoqués par la cause envisagée pendant la période d'observation dans la collectivité, divisé par le nombre de têtes exposées au risque, les sinistres provoqués par une autre cause que celle envisagée (par exemple, le décès) étant considérés comme des sorties s'étant produites, pour la moitié des sinistres au début, pour l'autre moitié à la fin de la période d'observation.

Si nous définissons ces probabilités corrigées par

$$Q_t^{\mathrm{I}(c)} \quad \text{et} \quad Q_t^{\mathrm{II}(c)} ,$$

on a

$$\frac{l_{\omega+t}^{\mathrm{I}:\mathrm{II}}}{l_\omega} = 1 - \frac{1 - \left[1 - Q_t^{\mathrm{I}(c)}\right]\left[1 - Q_t^{\mathrm{II}(c)}\right]}{1 - \frac{1}{4} \cdot Q_t^{\mathrm{I}(c)} \cdot Q_t^{\mathrm{II}(c)}} .$$

Les probabilités corrigées fournissent pour les probabilités indépendantes de bonnes valeurs approximatives et faciles à obtenir.

---

1 E. MARCHAND, Probabilités expérimentales, probabilités corrigées et probabilités indépendantes. 33me *Bulletin de l'Association des Actuaires suisses*, 1937.