Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES DOMAINES VECTORIELS ET LA THÉORIE DES CORPS CONVEXES

Autor: Vincensini, M. Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28028

LES DOMAINES VECTORIELS ET LA THÉORIE DES CORPS CONVEXES

PAR

M. Paul VINCENSINI (Marseille).

I. — DOMAINES VECTORIELS.

On sait qu'on appelle domaine vectoriel d'un corps convexe C de l'espace euclidien E_n à n dimensions, le domaine V rempli par les extrémités des vecteurs issus d'un point fixe O et équipollents aux différents vecteurs ayant pour origines et pour extrémités deux points quelconques de C [1].

V est convexe et admet le point O pour centre de symétrie. J'ai indiqué [2] une démonstration géométrique générale de la convexité de V, en me basant sur la génération suivante du domaine vectoriel d'un corps convexe quelconque C.

Déplaçons C par les différentes translations qui amènent un point quelconque de sa frontière à passer par le point fixe O. Nous obtenons ainsi un ensemble de ∞^{n-1} corps convexes congruents à C. La région de l'espace remplie par ces ∞^{n-1} corps est précisément V.

Les corps convexes que nous envisagerons dans la suite seront supposés doués, en chaque point frontière, d'un hyperplan tangent déterminé, variant continuement avec le point de

---

[1] Pour la notion de domaine vectoriel et quelques-unes de ses applications, voir: RADEMACHER: *Jahresbericht der D.M.V.*, t. XXXIV, 1925, p. 64. T. ESTERMANN: Sur le domaine vectoriel d'un corps convexe, *Math. Zeitschrift*, t. 28, 1928. GANAPATHI: Sur les domaines vectoriels, *Math. Zeitschrift*, t. 38, 1934.

[2] P. VINCENSINI: Sur les domaines vectoriels des corps convexes, *Journal de Math. pures et appliquées* t. XV, 1936.

contact. Autrement dit, il y aura une correspondance biunivoque et bicontinue, entre l'hypersurface frontière du corps et sa représentation hypersphérique. Dans ces conditions, chacun des ∞^{n-1} corps précédemment définis touche la frontière de V en un certain point, et les hyperplans tangents à un même corps, en O et au point A où il touche la frontière de V, sont *parallèles*.

Il résulte immédiatement de là que, si deux corps convexes C et C′ ont même domaine vectoriel, deux diamètres parallèles quelconques des deux corps *sont égaux et font le même angle avec les hyperplans tangents en leurs extrémités* [1].

On peut en effet, par des translations, amener les deux diamètres parallèles envisagés à coïncider avec un même rayon vecteur OA du domaine vectoriel.

Il est clair d'ailleurs que deux corps convexes de même domaine vectoriel ont même largeur [2] dans toutes les directions.

On peut dire si l'on veut que, C et C′ étant deux corps convexes ayant même domaine vectoriel, si π et π' sont deux hyperplans tangents parallèles et également situés touchant respectivement C et C′ en A et A′, la translation $\overrightarrow{AA'}$ amène les frontières des deux corps à être bitangentes en deux points diamétralement opposés.

L'hypersurface frontière de chacun des deux corps peut donc être regardée comme l'enveloppe complète de l'hypersurface frontière de l'autre, lorsque celle-ci se déplace par translation en restant constamment tangente à la première hypersurface.

Eu égard aux corps convexes du plan, il convient d'ajouter les propriétés suivantes. Soient M et M′ deux points diamétralement opposés d'un corps convexe C (du contour qui le limite), A le point correspondant du domaine vectoriel V [$\overrightarrow{OA}$ est équipollent à $\overrightarrow{M'M}$]. Lorsque les tangentes T et T′ à C en M et M′ tournent d'un angle $d\alpha$, M et M′ décrivent deux arcs ds et ds'. La tangente en A à V tourne du même angle $d\alpha$, et le point A décrit l'arc $d\sigma$ tel que

$$d\sigma = ds + ds' .$$

---

[1] Nous appelons *diamètre* d'un corps convexe, le segment déterminé par les points de contact de sa frontière avec deux hyperplans tangents parallèles.

[2] Une *largeur* d'un corps convexe est la distance de deux hyperplans tangents parallèles.

Il résulte de là que

1º la longueur de V est le double de celle de C;

2º le rayon de courbure de V en A est la somme des rayons de courbure de C en M et M'.

On déduit immédiatement de la deuxième propriété que si deux corps convexes plans ont même domaine vectoriel, et si leurs frontières ont même rayon de courbure en deux points (respectivement situés sur les deux frontières) où les tangentes sont parallèles, ces frontières *ont aussi même rayon de courbure aux points diamétralement opposés des précédents.*

Les courbes *orbiformes* [de largeur constante] limitent des corps convexes admettant des cercles pour domaines vectoriels. Toutes les orbiformes de même largeur d ont même longueur πd [la moitié de la longueur du domaine vectoriel commun]. En outre, une orbiforme et un cercle de même largeur peuvent toujours être amenés, d'une infinité de façons, à être bitangents en deux points diamétralement opposés.

II. — Les domaines vectoriels et la théorie des corps convexes.

Indépendamment de son intérêt propre, dû surtout à l'existence de relations extrémales fort remarquables établies par MM. Rademacher, Estermann et Ganapathi *(articles cités)* entre les volumes d'un corps convexe quelconque et de son domaine vectoriel, la notion de domaine vectoriel d'un corps convexe se prête à une étude remarquablement intuitive de nombreuses questions relatives aux corps convexes.

On sait à quelles difficultés on se heurte lorsqu'on essaye d'aborder, par l'analyse, les problèmes même les plus simples qui se présentent dans la théorie des corps convexes. Ces difficultés sont dans l'ordre logique des choses.

Il est incontestable que, depuis que Gauss a systématiquement employé les coordonnées curvilignes pour l'étude des propriétés des surfaces, créant ainsi la géométrie différentielle, des progrès considérables ont été réalisés en matière géométrique, dont beaucoup auraient été impossibles sans le secours de l'analyse. Mais, si la géométrie doit beaucoup à l'analyse, il n'en est pas moins vrai que celle-là a grandement contribué au développement de celle-ci.

Si, par exemple, l'utilité d'une étude des corps convexes s'était manifestée au moment où l'analyse cherchait sa voie, il est très probable que l'évolution de cette dernière n'aurait pas été tout à fait ce qu'elle est. Il est très normal que certaines théories géométriques, telle précisément la théorie des corps convexes, résistent à un instrument analytique qui n'a pas été spécialement fait pour elles.

Les principaux progrès réalisés dans ce domaine de la géométrie sont dus surtout à l'intuition géométrique elle-même, qui a successivement amené Brun, Minkowski et, plus récemment, Bonnesen [1], à introduire les notions, si parfaitement adaptées au sujet, de série linéaire, de volumes mixtes, de couronne circulaire ou de couronne minima attachées à un ensemble convexe plan.

Dès qu'une de ces notions a été introduite, un grand pas en avant a été fait. La notion de domaine vectoriel d'un corps convexe me semble devoir se montrer d'une efficacité comparable à celle des notions qui viennent d'être rappelées.

Il suffit pour s'en convaincre de se reporter aux travaux de Ganapathi *(loc. cit.)*, relatifs à la structure des ovales du plan, ou à certaines inégalités isopérimétriques, telle par exemple l'inégalité

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geqq 2M + \frac{(D - \Delta)^2}{4},$$

où L et S sont la longueur et l'aire d'une figure convexe plane quelconque C, D et Δ les diamètres maximum et minimum de C, M l'aire de la courbe moyenne de C [lieu des milieux des diamètres]; inégalité qui, dans le cas des orbiformes, se réduit à

$$\frac{L^2}{4\pi} - S \geqq 2M.$$

---

[1] T. Bonnesen: *Le problème des isopérimètres et des isépiphanes*. Paris, Gauthier-Villars, 1929.

Récemment [Mémoire cité du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*], j'ai appliqué la notion de domaine vectoriel à la détermination des figures convexes dont la largeur *est donnée dans toute direction.* La construction à laquelle j'ai été conduit, remarquablement simple, donne en particulier les orbiformes si la largeur est supposée constante; en outre, elle s'étend tout naturellement à l'espace.

Dans deux Notes publiées dans les *Rendiconti dei Lincei* [1], M. B. SEGRE a énoncé un grand nombre de propriétés des arcs convexes, des ovales et des orbiformes du plan. Les résultats de M. Segre ont attiré l'attention de M. HADAMARD, qui a bien voulu me charger de les exposer dans une séance de son séminaire du Collège de France. Ignorant les démonstrations de M. Segre, j'ai cherché à établir ses propositions en les rattachant, autant que possible, à la notion de domaine vectoriel.

Il se trouve que quelques-unes en sont des conséquences presque immédiates, beaucoup d'autres s'y ramenant avec la plus grande facilité.

Pour illustrer par quelques nouveaux exemples la fécondité de la notion de domaine vectoriel, je vais reprendre, à ce nouveau point de vue, quelques-uns des résultats de M. B. Segre.

III. — LES RÉSULTATS DE M. SEGRE.

Les résultats de M. B. Segre sont, en grande partie, relatifs à la courbure des courbes convexes du plan. Les courbes considérées sont des courbes *intuitives* au sens de M. SEVERI, c'est-à-dire, tout entières situées à distance finie et douées, en chaque point, d'une tangente variant d'une façon continue et d'une courbure également continue et non nulle. Une ligne ouverte sera dite *un arc;* l'arc sera convexe lorsque, avec sa corde, il détermine une surface convexe.

Lorsqu'un point parcourt un arc dans un certain sens, la tangente correspondante tourne d'un certain angle que M. B. Segre, avec M. MUKOPADYAYA [2], appelle la *déflexion* de l'arc.

---

[1] 6me série, t. 20, 1934.
[2] *Collected geometrical papers of Calcutta*, 1931.

Si la déflexion est égale à π les tangentes aux extrémités de l'arc sont parallèles. Pour une courbe convexe fermée (un ovale), la déflexion est égale à $2\,\pi$. Si les tangentes aux extrémités d'un arc se coupent, la déflexion est inférieure à π ou supérieure à π, suivant que l'arc est tout entier à l'intérieur ou tout entier à l'extérieur du triangle formé par les deux tangentes et la corde.

La plupart des propositions énoncées par M. Segre découlent plus ou moins directement du théorème fondamental suivant:

Considérons deux arcs convexes distincts C et C′ dont les déflexions sont inférieures ou égales à π, ayant les mêmes extrémités et tangents en au moins une extrémité. Il est clair que l'on peut établir entre ces deux arcs (ou entre l'un d'eux et une portion convenable de l'autre) une correspondance biunivoque par tangentes parallèles. *Dans cette correspondance, la différence des courbures en deux points homologues de* C *et* C′ *prend des valeurs positives et des valeurs négatives; il y a, par suite, sur les deux arcs, un couple (au moins) de points homologues distincts des extrémités, en lesquels les courbures sont égales.*

Le théorème précédent peut être présenté sous la forme légèrement différente suivante, qui nous sera plus commode dans la suite.

Soit un triangle quelconque ABC [C peut être à l'infini] et deux arcs de courbes convexes $\overset{\frown}{BM}$, $\overset{\frown}{BN}$ tangents en B au côté AB, situés à l'intérieur du triangle, et tels que les tangentes aux points M et N où ils aboutissent sur AC soient parallèles. *Si l'on établit une correspondance par tangentes parallèles entre les points des deux arcs, la différence des courbures en deux points correspondants quelconques prend des valeurs positives et des valeurs négatives, et il existe au moins un couple de points correspondants en lesquels les courbures sont égales.*

Le fait que la différence des courbures en deux points homologues ne peut pas prendre de valeurs d'un signe déterminé signifie, dans cet énoncé comme dans le précédent, *que les deux arcs coïncident.*

Parmi les résultats de M. Segre, reprenons plus spécialement le suivant, relatif aux ovales, pour montrer comment la notion de domaine vectoriel peut intervenir utilement dans la démonstration.

Soient, C *un ovale quelconque différent d'un orbiforme,* s *le minimum de la somme des rayons de courbure en deux points diamétralement opposés,* S *le maximum de cette somme,* d *et* D *les largeurs minima et maxima de* C, l *la longueur de* C. On a

$$s < d < \frac{l}{\pi} < \mathrm{D} < \mathrm{S} . \qquad (1)$$

Substituons à l'ovale envisagé son domaine vectoriel dont la frontière V est un ovale doué d'un centre de symétrie O. Les largeurs minimum et maximum de C correspondent aux rayons vecteurs minimum et maximum $\mathrm{OA} = d$ et $\mathrm{OB} = \mathrm{D}$ de V [fig. 1].

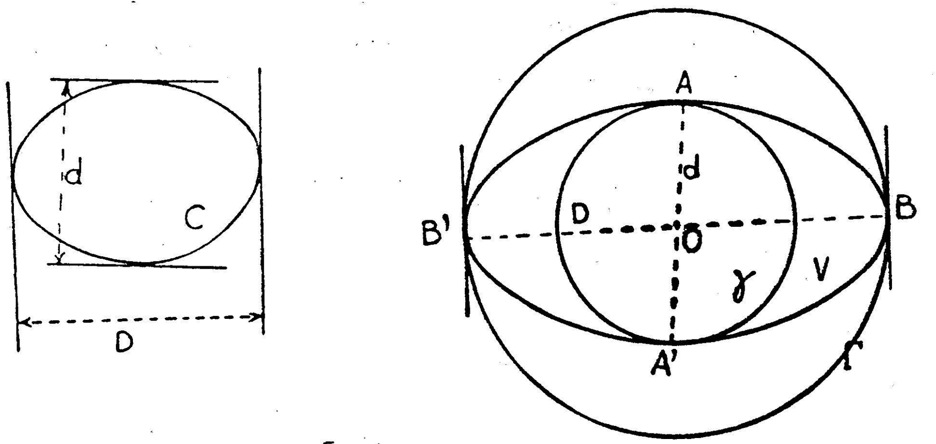

Fig 1

Les diamètres AA′ et BB′ de V sont normaux à V, et les cercles γ et Γ de diamètres AA′, BB′ sont respectivement le plus grand cercle inscrit dans V et le plus petit cercle circonscrit à V.

Le minimum s et le maximum S de la somme des rayons de courbure en deux points diamétralement opposés de C sont, d'après le numéro I, respectivement le minimum et le maximum du rayon de courbure de V.

Considérons les deux arcs de V et γ situés d'un côté déterminé de AA′; d'après la proposition de M. Segre rappelée plus haut, il existe sur ces deux arcs deux points (au moins) où les tangentes sont parallèles et où les rayons de courbure sont égaux; il existe donc un point au moins sur V en lequel le rayon de courbure est égal à d.

La différence des rayons de courbure en deux points homologues de V et de γ prenant, comme l'on sait, des valeurs positives et négatives, le minimum du rayon de courbure de V est inférieur à d. On a donc

$$s < d .$$

Le même raisonnement appliqué à V et Γ donne

$$\mathrm{D} < \mathrm{S} .$$

Il reste à montrer que

$$d < \frac{l}{\pi} < \mathrm{D} .$$

Il suffit pour cela de regarder la figure (1). Γ enveloppe V qui, à son tour, enveloppe Γ. On peut donc écrire

$$\frac{1}{2} \text{ long. de } \gamma < \frac{1}{2} \text{ long. de V} < \frac{1}{2} \text{ long. de } \Gamma ,$$

d'où immédiatement

$$d < \frac{l}{\pi} < \mathrm{D} .$$

La suite des inégalités (1) donne des propriétés extrémales caractéristiques des orbiformes. Pour qu'un ovale soit orbiforme, *il faut et il suffit que deux quelconques des cinq quantités figurant dans* (1) *soient égales.*

Le caractère de nécessité de la proposition est immédiat. Si C est une orbiforme, dans la figure (1) C, γ et Γ sont confondus, d'où l'égalité des cinq quantités figurant dans les inégalités (1). Montrons que la condition énoncée est suffisante.

Si $d = \mathrm{D}$, la largeur de C est constante et C est bien une orbiforme.

Si $d = \frac{l}{\pi}$, les deux ovales V et γ ont même longueur; or V enveloppe γ, donc V et γ sont identiques. Le domaine vectoriel V de C étant un cercle, C est une orbiforme. Le même raisonnement s'applique si $\mathrm{D} = \frac{l}{\pi}$.

Si $s = d$, la différence des rayons de courbure de V et γ en deux points homologues ne peut pas prendre de valeurs négatives; il résulte alors d'une remarque antérieure que V et γ sont identiques. V étant un cercle, C est une orbiforme. Le raisonnement est identique si D = S.

IV. — La correspondance équilongue.

Considérons deux ovales quelconques C et C′; on peut toujours, d'une infinité de façons, établir entre les deux ovales une correspondance ponctuelle conservant les déflexions. Il suffit, à cet effet, de prendre arbitrairement deux points A et A′ sur C et C′ dont les tangentes font un certain angle α, puis d'associer les couples de points M et M′ de C et C′ tels que les déflexions des arcs $\overset{\frown}{AM}$, $\overset{\frown}{A'M'}$ soient constamment égales. M et M′ peuvent décrire C et C′ en tournant dans le même sens ou dans des sens inverses; nous nous bornerons à envisager le premier cas. Il est clair que, sur C et C′, les couples de points diamétralement opposés se correspondent.

La correspondance établie par M et M′ sur C et C′ est dite par M. B. Segre *équilongue* si la distance de deux tangentes parallèles de C est constamment égale à la distance des deux tangentes homologues de C′. M. Segre justifie sa définition en montrant que, lorsqu'il en est ainsi, C et C′ ont même longueur. Cette propriété devient immédiate si l'on fait tourner C de l'angle $-\alpha$; après la rotation, C et C′ (qui se correspondent par tangentes parallèles) ont même largeur dans toutes les directions, donc même domaine vectoriel et par suite même longueur (moitié de la longueur du domaine vectoriel).

Il se trouve que la plupart des propriétés des ovales que M. Segre a rattachées aux correspondances équilongues, peuvent être très simplement obtenues par la rotation d'angle $-\alpha$ effectuée sur C, suivie de la considération du domaine vectoriel commun de C et C′. Considérons par exemple la proposition suivante:

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une correspondance conservant les déflexions, entre deux ovales C *et* C′, *soit équilongue,* *est que la somme des rayons de courbure du premier ovale en deux points opposés soit constamment égale à celle des rayons de courbure aux points correspondants du second.*

Faisons tourner C de l'angle — α, de façon à rendre les tangentes homologues parallèles. Il suffit alors, pour montrer que la condition énoncée est nécessaire, d'observer que, C et C′ ayant même domaine vectoriel, les sommes des rayons de courbure de C et C′ en deux couples de points diamètralement opposés sont égales au rayon de courbure du point correspondant de la frontière du domaine vectoriel commun (voir le n° I).

La condition est suffisante car, après la rotation, les deux domaines vectoriels, supposés d'abord distincts, doivent avoir la même courbure aux points où les tangentes sont parallèles. Cette propriété entraîne l'identité des deux domaines vectoriels. Les deux ovales C et C′ ayant même domaine vectoriel sont bien en correspondance équilongue.

Parmi les autres propositions énoncées par M. Segre envisageons, pour terminer, la suivante:

Si entre deux ovales C *et* C′ *existe une correspondance équilongue, il y a toujours sur* C *six points distincts au moins, en chacun desquels la courbure de* C *est égale à celle de* C′ *au point correspondant.*

Pour la démonstration amenons toujours, par rotation, C et C′ à avoir même domaine vectoriel. On a vu au numéro I que, par une translation de l'un des deux ovales, on pouvait amener C et C′ à être bitangents en deux points diamétralement opposés A et B. Considérons alors les deux arcs de C et C′ situés d'un côté déterminé de AB; il y a, sur ces deux arcs, en vertu du théorème fondamental du numéro III, deux points homologues (tangentes parallèles) en lesquels les courbures sont égales.

A ces points correspondent sur les deux demi-ovales situés de l'autre côté de AB, des points diamétralement opposés en lesquels, d'après le numéro I, les courbures sont aussi égales. Nous pouvons supposer que la translation dont il a été question plus haut a eu pour effet de rendre C et C′ bitangents aux couples de points diamétralement opposés qui viennent d'être mis en évidence.

Dans la figure (2), C et C′ auront alors même courbure en A et B.

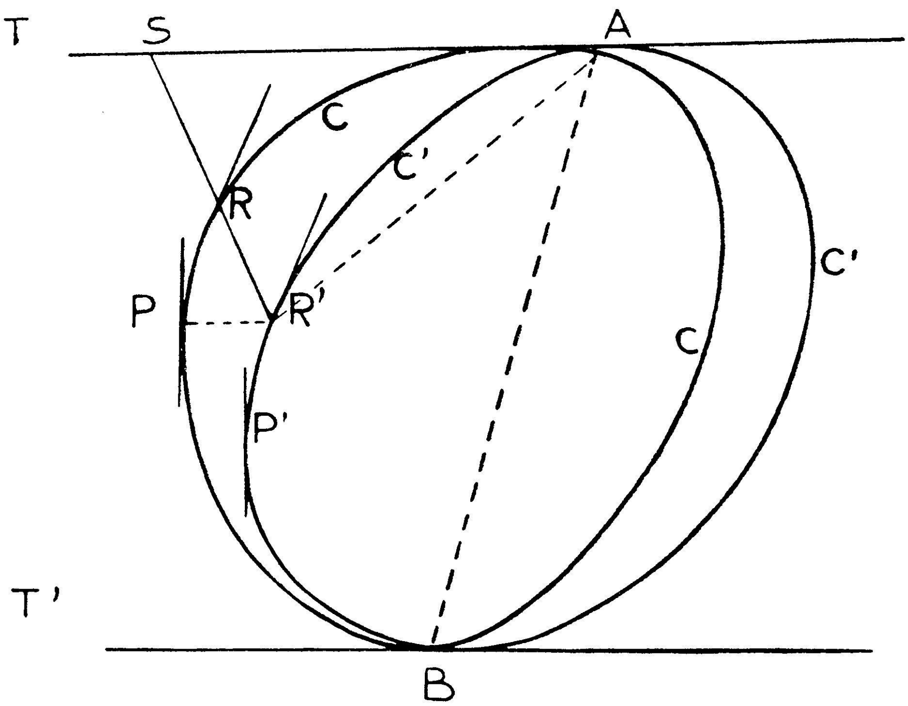

Fig. 2

Si les deux arcs $\widehat{ACB}$, $\widehat{AC'B}$ ont un point commun M distinct de A et B, l'application du théorème fondamental aux deux couples d'arcs d'extrémités A et M, B et M de C et C′, établit immédiatement l'existence de deux nouveaux couples de points opposés sur C et C′ vérifiant la condition de l'énoncé, et l'on a bien, sur chacun des deux ovales, six points en chacun desquels le rayon de courbure est égal au rayon de courbure au point correspondant de l'autre ovale.

Pour démontrer le théorème dans toute sa généralité, nous pouvons donc supposer, conformément à la figure (2), que l'arc $\widehat{AC'B}$ est à l'intérieur de la région du plan déterminé par l'arc $\widehat{ACB}$ et la corde AB.

Continuons à appliquer le même théorème fondamental aux deux ars $\widehat{ACB}$, $\widehat{AC'B}$: il existe sur ces deux arcs deux points homologues P et P′ en lesquels les courbures sont égales.

Avec les points P_1 et P'_1 diamétralement opposés à P et P′, nous avons déjà quatre points sur C répondant à la question.

Pour mettre en évidence le dernier couple de points de l'énoncé menons PR′ parallèle aux tangentes T et T′ en A et B à C et C′, R′ étant sur C′. Soit R le point de C homologue du point R′ de C′. En intervertissant au besoin A et B, on peut supposer que l'on a

$$\text{long. } \widehat{AP'} \geqq \text{long. } \widehat{AR'} \; ;$$

dans ces conditions long. $\widehat{AP} \geqq$ long. $\widehat{AR}$; R est sur l'arc $\widehat{AP}$, et la droite R′R coupe T en un certain point S (qui peut être rejeté à l'infini si $\widehat{AP} = \widehat{AR}$).

Il suffit d'envisager les deux arcs $\widehat{AR}$, $\widehat{AR'}$ tangents en A au côté AS du triangle A S R′, et d'appliquer (sous sa deuxième forme) le théorème du numéro III, pour voir qu'il existe sur C, entre A et R, un point U en lequel le rayon de courbure de C est égal au rayon de courbure de C′ au point homologue U′. Le point U_1 diamétralement opposé à U sur C donne lieu à la même conclusion.

En définitive, conformément au théorème énoncé, nous avons établi l'existence de trois couples de points diamétralement opposés (A, B), (P, P′), (U, U′) en lesquels les rayons de courbure de C sont égaux aux rayons de courbure aux points correspondants de C′.

Si l'on suppose que C′ est confondu avec C, les points homologues étant *diamétralement opposés sur* C, on voit qu'il existe, sur tout ovale, trois couples de points diamétralement opposés en lesquels les courbures sont égales, et que par suite (GANAPATHI, *loc. cit.*) *la courbe moyenne (voir n° II) d'un ovale quelconque présente au moins trois points de rebroussement.*