Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR L'ESPACE QUASI-EUCLIDIEN DE M. PIERRE HUMBERT

Autor: Herrmann, Aloys

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28027

SUR L'ESPACE QUASI-EUCLIDIEN DE M. PIERRE HUMBERT

PAR

Aloys HERRMANN (Köthen in Anhalt).

Par des recherches concernant l'équation différentielle de M. Pierre HUMBERT [1]

$$\Delta_3 U = U_{xxx} + U_{yyy} + U_{zzz} - 3U_{xyz} = 0 ,$$

on est amené à la considération d'un espace quasi-euclidien, pour lequel on peut concevoir, comme élément de longueur, l'expression différentielle

$$ds = \sqrt[3]{dx^3 + dy^3 + dz^3 - 3\,dx\,dy\,dz} ;$$

le rôle des cosinus directeurs de la géométrie euclidienne est joué par les trois fonctions $P(\Theta, \varphi)$, $Q(\Theta, \varphi)$, $R(\Theta, \varphi)$ de Paul APPELL.

La relation de P. HUMBERT

$$-\log[1 - 3hP(\Theta, \varphi) + 3h^2P(-\Theta, -\varphi) - h^3] = \sum_n \frac{3h^n}{n} P(n\Theta, n\varphi)$$

peut être employée [2] pour définir des polynomes C_n^ν et H_n; une généralisation des polynomes de LEGENDRE et de HERMITE, donne [3]

$$\sum_n h^n C_n^\nu(x, y) = (1 - 3hx + 3h^2y - h^3)^{-\nu} ,$$

$$\sum_n \frac{h^n}{n!} H_n(x, y) = e^{hx - h^2y + \frac{h^3}{3}} .$$

---

[1] P. HUMBERT, Sur les potentiels du troisième ordre. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, A. 52, p. 293-305 (1932).

[2] J. DEVISME, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 195, 1059-1061 (1932).

[3] *Ibd.*, Sur l'équation de M. P. Humbert. *Ann. Fac. Sc. Univ. Toulouse*, III, t. 25 (1933) et

[3] Sur les équations aux dérivées partielles de MM. P. Humbert et M. Ghermanesco, *Mathematica*, Cluj, 8, 117-125 (1934).

Dans ce travail je considérerai les fonctions d'APPELL d'un point de vue plus général. Nous allons indiquer comment on peut établir une représentation géométrique des arguments Θ, φ de ces fonctions. J'ai en vue de déduire dans un travail postérieur que l'étude des polynomes C_n^ν et H_n s'applique à un espace à un nombre quelconque de dimensions. Notre méthode pour introduire les fonctions d'APPELL est basée sur l'existence d'un système spécial de nombres hypercomplexes.

Nous allons examiner le système des éléments

$$Z = x_0 + x_1 A + x_2 A^2 + \dots + x_{n-1} A^{n-1} \tag{1}$$

où les coefficients sont des quantités quelconques données, réelles ou imaginaires; A désigne une matrice quelconque à n^2 coefficients, qui satisfait à une certaine équation minimale. Soit A une matrice carrée, alors le dernier diviseur élémentaire de la matrice $\lambda I - A$ est l'équation minimale pour A, qui soit du degré n. Les considérations suivantes fournissent la représentation de Z par les matrices covariantes de FROBENIUS, adjointes à la matrice A.

Nous pouvons écrire chaque matrice A sous la forme

$$A = A_0 + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_n A_n \ ,$$

où les λ_i sont les racines caractéristiques de A. Quant à A_0 c'est une matrice de puissance nulle et les A_i sont les matrices covariantes.

Nous voulons supposer que les racines caractéristiques sont simples. Cela posé on peut écrire, à l'aide des matrices covariantes, pour chaque fonction entière $g(z)$, la relation

$$g(A) = \sum_{j=1}^{n} g(\lambda_j) A_j \ .$$

On peut mettre Z sous la forme

$$Z = \sum_{j=1}^{n} (x_0 + x_1 \lambda_j + \dots + x_{n-1} \lambda_j^{n-1}) A_j = \sum_{j=1}^{n} \xi_j A_j \ ; \tag{2}$$

et nous nommons ξ_j la $j^{\text{ième}}$ composante de Z. Il suit des qualités des covariantes pour une fonction

$$W = F(Z) = \varphi_0 + \varphi_1 A + \varphi_2 A^2 + \dots + \varphi_{n-1} A^{n-1} , \qquad (3)$$

qu'on a pour la $j^{\text{ième}}$ composante

$$F(x_0 + x_1 \lambda_j + \dots + x_{n-1} \lambda_j^{n-1}) = \varphi_0 + \varphi_1 \lambda_j + \dots + \varphi_{n-1} \lambda_j^{n-1} , \qquad (4)$$
$$(j = 1, 2 \dots n) .$$

Nous conviendrons de nommer le produit des composantes ξ_i,

$$\prod_{i=1}^{n} \xi_i = N(Z) , \qquad (5)$$

le « norme » de Z, et définissons, en outre, le « module » de l'élément Z par

$$|Z| = \rho = (N(Z))^{\frac{1}{n}} . \qquad (6)$$

On peut écrire tout élément Z sous la forme

$$Z = \rho Z_0 , \qquad (7)$$

Z_0 ayant l'unité pour module.

Pour montrer comment on peut obtenir les fonctions d'Appell et leurs généralisations, il faut avoir égard au fait que la formule (3) subsiste aussi pour toutes les fonctions entières; nous choisirons la fonction exponentielle: $W = F(Z) = \exp Z$.

De tous les systèmes hypercomplexes et commutatifs $Z = x_0 + x_1 A + \dots + x_{n-1} A^{n-1}$, nous regardons le cas où $|\lambda I - A| = \lambda^3 - 1$ est l'équation minimale. Les trois racines caractéristiques sont désignées par $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = j$, $\lambda_3 = j^2$.

Dans le cas ou x, y, z sont des quantités réelles nous interprétons les éléments $Z = x + yA + zA^2$ comme des vecteurs qui ont leur point de départ à l'origine des coordonnées, et qui ont l'autre extrémité au point (x, y, z). Définissons comme « la distance du point (x, y, z) au point $(0, 0, 0)$ » le module de Z, c'est-à-dire $|Z| = \rho = N(Z)^{\frac{1}{3}}$. Il suit de (2)

$$|Z| = \rho = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(x+y+z)(x+yj+zj^2)(x+j^2y+jz)}$$

ou

$$|Z| = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz} .$$

Pour la fonction exponentielle $W = \exp(\eta + \Theta A + \varphi A^2)$ on a d'après (3),

$$\exp(\eta + \Theta A + \varphi A^2) = \varphi_0 + \varphi_1 A + \varphi_2 A^2 = Z .$$

Soit $Z_1 = x + yA + zA^2$ un élément du norme « 1 ». Nous voulons exprimer x, y, z par la fonction exponentielle. Il suit de la représentation par les composantes:

$$\begin{aligned} \exp(\eta + \Theta + \varphi) &= \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 \\ \exp(\eta + \Theta j + \varphi j^2) &= \varphi_0 + \varphi_1 j + \varphi_2 j^2 \\ \exp(\eta + \Theta j^2 + \varphi j) &= \varphi_0 + \varphi_1 j^2 + \varphi_2 j \\ N(\eta + \Theta A + \varphi A^2) &= \varphi_0^3 + \varphi_1^3 + \varphi_2^3 - 3\varphi_0\varphi_1\varphi_2 = e^{3\eta} . \end{aligned}$$

Pour $N(Z) = 1$, on a $e^{3\eta} = 1$, $\eta = 0$.
Reste à déterminer x, y, z, si

$$\exp(\Theta + \varphi) = x + y + z , \quad \exp(\Theta j + \varphi j^2) = x + yj + zj^2 ,$$
$$\exp(\Theta j^2 + \varphi j) = x + yj^2 + zj .$$

Il résulte

$$x = \frac{1}{3}\left(\exp(\Theta + \varphi) + \exp(\Theta j + \varphi j^2) + \exp(\Theta j^2 + \varphi j)\right) = P(\Theta, \varphi) ,$$

$$y = \frac{1}{3}\left(\exp(\Theta + \varphi) + j^2 \exp(\Theta j + \varphi j^2) + j \exp(\Theta j^2 + \varphi j)\right) = Q(\Theta, \varphi) ,$$

$$z = \frac{1}{3}\left(\exp(\Theta + \varphi) + j \exp(\Theta j^2 + \varphi j) + j^2 \exp(\Theta j + \varphi j^2)\right) = R(\Theta, \varphi) ;$$

Ce sont les fonctions d'Appell. L'extension à des aggrégats analogues aux fonctions d'Appell pour un espace à dimensions quelconques ne souffre aucune difficulté. Les fonctions généralisées d'Appell seront obtenues, si l'on exprime les coefficients $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ de $Z = x_0 + x_1 A + x_2 A^2 + \ldots + x_{n-1} A^{n-1}$ par les composantes de la fonction $\exp(\Theta_1 A + \Theta_2 A^2 + \ldots + \Theta_{n-1} A^{n-1})$. (Regardons le cas $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, A ayant les racines caractéristiques λ_1 et λ_2; il viendra

$$Z = \frac{\lambda_2 \exp\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\Theta\right) - \lambda_1 \exp\left(-\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\Theta\right)}{\lambda_2 - \lambda_1} +$$

$$+ \frac{\exp\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\Theta\right) - \exp\left(-\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}\Theta\right)}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot A$$

ou

$$Z = e^{\Theta A} .$$

Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\lambda_{1,2} = \pm i$, on a $Z = \cos\Theta + A \sin\Theta$, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on aura les fonctions hyperboliques $\mathfrak{Sin}$ et $\mathfrak{Cos}\,\Theta$. Dans le cas de l'équation minimale $\lambda^2 = 0$ le système $x + Ay$ est le système des nombres duals [1].

Proposons-nous de caractériser les points de l'espace à trois dimensions pour le module $|Z|$ et les deux arguments Θ, φ des fonctions d'Appell. Nous ferons correspondre aux éléments, de norme constant p, leurs points d'image sur une surface

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p .$$

Pour reconnaître les arguments Θ, φ des fonctions d'Appell, nous considérons la surface avec $p = 1$. Le plan $x + y + z = 0$ est plan asymptotique des surfaces pour chaque paramètre p, la perpendiculaire à ce plan en (0, 0, 0) est une axe de symétrie pour la surface, et la surface est engendrée par rotation. On se trouve donc aisément conduit à considérer de nouvelles coordonnées pour caractériser les points de l'espace. Prenons un point arbitraire. Un plan qui passe par l'axe et est limité à cet

[1] E. Study, *Geometrie der Dynamen*, Leipzig, 1903. Pour les applications géométriques si $\lambda^2 - 1 = 0$, voir: Suschkewitsch, Ueber die Streckenrechnung, *Rec. Math. Moscou*, 35 (p. 251-261), et pour le suivant: H. Schütz, Untersuchungen über funktionale Congruenzen, *Diss.*, Göttingen, 1867.

axe, et un plan qui coupe un cercle sur la surface sont déterminés uniquement par le point. Soit

$$\pi_0 = P(O, O) + Q(O, O)A + R(O, O)A^2 ;$$

nous choisirons ce point pour origine et pour obtenir tous les points de la surface, une fois chacun, en faisant varier Θ et φ. Si nous calculons le volume ϑ' limité des deux cercles, correspondant à π_0 et π, et l'angle Φ' formé des deux plans limités par l'axe, ϑ' et Φ' se rendent respectivement proportionnels à $\frac{\Theta+\varphi}{2}$ et $\frac{\Theta-\varphi}{2}$. Si $P(\Theta, \varphi)$, $Q(\Theta, \varphi)$ et $R(\Theta, \varphi)$ sont les cosinus directeurs du vecteur relatif à π et si nous marquons le point $\pi^{(n)}$ qui correspond au volume $n\vartheta'$ et à l'angle $n\Phi'$, les cosinus directeurs de $\pi^{(n)}$ sont $P(n\Theta, n\varphi)$, $Q(n\Theta, n\varphi)$ et $R(n\Theta, n\varphi)$. Des raisonnements précédents résultent les fonctions d'Appell généralisées; nous remarquons que M. J. Devisme les tire des transformations linéaires $u_i = \sum\limits_j a_{ij}\, x_j$, qu'il utilise dans ses recherches sur l'équation $\dfrac{\partial^r_v}{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_r} = 0$.

Nous voulons enfin mentionner ici, quelle est la forme de la relation de Humbert dans le cas général. Soit A une matrice carrée à m^2 coefficients avec les racines caractéristiques simples $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Nous écrivons les éléments du norme « 1 » dans la forme $\exp(\Theta_1 A, + \ldots + \Theta_{m-1} A^{m-1}) = P_1 + P_2 A + \ldots + P_m A^{m-1}$, où les P_i sont des fonctions de $\Theta_1, \Theta_2 \ldots \Theta_{m-1}$. Soit

$$|Z| = |x_0 + x_1 A + \ldots + x_{m-1} A^{m-1}| = h .$$

On aura la relation

$$-\log(N(1-Z)) = \sum_n \frac{mh^n}{n} P_1(n\Theta_1, n\Theta_2, \ldots n\Theta_{m-1}) .$$

Nous utiliserons cette relation pour obtenir les polynomes C_n^ν et H_n généralisés.