Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES A LA BIOLOGIE

Autor: Volterra, Vito

Kapitel: § XIII

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28039

forme est définie et positive, l'association biologique est stable, c'est-à-dire que l'association ne peut pas s'épuiser et aucune des populations ne peut croître indéfiniment. En outre, s'il existe un état stationnaire, l'association biologique s'approchera indéfiniment de cet état.

D'après les définitions que nous avons données, la valeur de l'association biologique ou son énergie actuelle est donnée par

$$\mathrm{V} = \mathrm{L} = \sum_{1}^{n}{}_{r}\, \beta_r \mathrm{N}_r \,.$$

Dans un temps infiniment petit, l'augmentation de cette valeur est constituée de deux parties

$$d\mathrm{V}_1 = \sum_{1}^{n}{}_{r}\, \varepsilon_r \beta_r \mathrm{N}_r dt \,, \qquad d\mathrm{V}_2 = -\sum_{1}^{n}{}_{r} \sum_{1}^{n}{}_{s}\, p_{sr} \mathrm{N}_s \mathrm{N}_r dt \,.$$

La première est due aux causes constantes d'accroissement ou de diminution de chaque espèce. La seconde est due aux actions réciproques des individus des différentes espèces. Si celle-ci est nulle, l'association s'appellera *conservative.* Les associations biologiques conservatives sont justement celles que nous avons étudiées d'abord. Elles sont des êtres idéaux dont la nature s'approche. Si la forme fondamentale est définie et positive, les actions réciproques entre individus tendent à diminuer la valeur ou l'énergie actuelle de l'association. Nous dirons alors que l'association est *dissipative.*

La loi de la conservation de l'énergie démographique n'est plus vérifiée, car l'énergie totale diminue comme s'il existait un frottement interne au sein de l'association.

§ XIII

Ayant indiqué les conséquences des intégrales, nous allons établir d'autres principes qui nous rapprochent des théories classiques de la mécanique analytique.

Nous avons déjà annoncé l'existence d'un principe de minimum dont on aurait pu déduire toutes les lois de la lutte pour la vie.

Nous allons maintenant l'établir. Pour cela, il faut employer les équations (3). N_r étant la population d'une espèce, $\frac{dN_r}{N_r}$ est son accroissement relatif élémentaire. Si nous faisons la somme de tous ces accroissements élémentaires depuis l'existence d'un individu jusqu'à l'existence de N_r individus, nous trouvons

$$\int_0^{N_r} \frac{dN}{N} = \log N_r \ .$$

On peut prendre comme mesure de l'*action vitale élémentaire* le produit

$$\beta_r \log N_r \, dX_r = \beta_r \log N_r \cdot N_r dt = \beta_r \log X'_r \cdot X'_r dt$$

et si nous ajoutons toutes les actions vitales élémentaires pendant un intervalle de temps $(0, t)$ nous aurons pour l'espèce r

$$\int_0^t \beta_r \log N_r \cdot X'_r dt \ .$$

Si nous envisageons toutes les espèces de l'association l'*action vitale totale* sera donnée par

$$A = \int_0^t \sum_1^n \beta_r \log N_r \cdot N_r dt \ .$$

Considérons maintenant la forme bilinéaire

$$Z = \sum_1^n{}_r \sum_1^n{}_s a_{rs} X'_r X_s \ ,$$

et le potentiel démographique P qui s'écrit (§ IX):

$$P = \sum_1^n{}_r \beta_r \varepsilon_r X_r + \frac{1}{2} \Sigma_r \Sigma_s c_{rs} X_r X_s$$

où

$$c_{rs} = c_{sr} \ .$$

Alors en introduisant la fonction

$$\Phi = \sum_{1}^{n}{}_r \beta_r X'_r \log X'_r + \frac{1}{2} Z + P$$

on peut mettre les équations fondamentales (3) sous la forme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Phi}{\partial X'_r} - \frac{\partial \Phi}{\partial X_r} = 0 , \tag{6}$$

qui est la forme eulérienne des équations du calcul des variations.

L'importance de cette transformation consiste dans le fait qu'elle relie la question de la lutte pour la vie à un problème du calcul des variations.

§ XIV

Nous allons dire un mot en général au sujet de ce chapitre de l'analyse.

Le calcul différentiel est né du problème des maxima et minima des fonctions. Si une quantité variable est représentée par une fonction dérivable on trouvera ses maxima et ses minima en annulant sa dérivée. Mais il peut arriver que la dérivée s'annule sans que l'on ait à faire ni à un maximum ni à un minimum. On dit alors que la fonction est stationnaire.

C'est là le cas le plus simple, mais on peut avoir aussi à chercher des maxima ou des minima de quantités qui ne dépendent pas d'une ou de plusieurs variables, mais qui dépendent d'une courbe variable. C'est ainsi que se présente le problème de trouver la forme qu'il faut donner au profil d'un projectile pour qu'il rencontre la moindre résistance dans l'air, ou la forme qu'il faut donner à la courbe de descente d'un corps pesant pour que le temps de la chute soit un minimum. Le calcul qui traite de ces problèmes est le calcul des variations.

Or le problème général de la mécanique se réduit à un problème du calcul des variations. C'est Lagrange qui l'a vu d'une manière claire pour la première fois et le principe général correspondant a été formulé sous sa forme définitive par Hamilton, d'où son nom de *principe de Hamilton*.