

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 36 (1937)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES A LA BIOLOGIE  
**Autor:** Volterra, Vito  
**Kapitel:** § XIII  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-28039>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

forme est définie et positive, l'association biologique est stable, c'est-à-dire que l'association ne peut pas s'épuiser et aucune des populations ne peut croître indéfiniment. En outre, s'il existe un état stationnaire, l'association biologique s'approchera indéfiniment de cet état.

D'après les définitions que nous avons données, la valeur de l'association biologique ou son énergie actuelle est donnée par

$$V = L = \sum_1^n \beta_r N_r .$$

Dans un temps infiniment petit, l'augmentation de cette valeur est constituée de deux parties

$$dV_1 = \sum_1^n \varepsilon_r \beta_r N_r dt , \quad dV_2 = - \sum_1^n \sum_1^n p_{sr} N_s N_r dt .$$

La première est due aux causes constantes d'accroissement ou de diminution de chaque espèce. La seconde est due aux actions réciproques des individus des différentes espèces. Si celle-ci est nulle, l'association s'appellera *conservative*. Les associations biologiques conservatives sont justement celles que nous avons étudiées d'abord. Elles sont des êtres idéaux dont la nature s'approche. Si la forme fondamentale est définie et positive, les actions réciproques entre individus tendent à diminuer la valeur ou l'énergie actuelle de l'association. Nous dirons alors que l'association est *dissipative*.

La loi de la conservation de l'énergie démographique n'est plus vérifiée, car l'énergie totale diminue comme s'il existait un frottement interne au sein de l'association.

### § XIII

Ayant indiqué les conséquences des intégrales, nous allons établir d'autres principes qui nous rapprochent des théories classiques de la mécanique analytique.

Nous avons déjà annoncé l'existence d'un principe de minimum dont on aurait pu déduire toutes les lois de la lutte pour la vie.

Nous allons maintenant l'établir. Pour cela, il faut employer les équations (3).  $N_r$  étant la population d'une espèce,  $\frac{dN_r}{N_r}$  est son accroissement relatif élémentaire. Si nous faisons la somme de tous ces accroissements élémentaires depuis l'existence d'un individu jusqu'à l'existence de  $N_r$  individus, nous trouvons

$$\int_0^{N_r} \frac{dN}{N} = \log N_r .$$

On peut prendre comme mesure de l'action vitale élémentaire le produit

$$\beta_r \log N_r dX_r = \beta_r \log N_r \cdot N_r dt = \beta_r \log X_r' \cdot X_r' dt$$

et si nous ajoutons toutes les actions vitales élémentaires pendant un intervalle de temps  $(0, t)$  nous aurons pour l'espèce  $r$

$$\int_0^t \beta_r \log N_r \cdot X_r' dt .$$

Si nous envisageons toutes les espèces de l'association l'action vitale totale sera donnée par

$$A = \int_0^t \sum_1^n \beta_r \log N_r \cdot N_r dt .$$

Considérons maintenant la forme bilinéaire

$$Z = \sum_1^n \sum_1^n a_{rs} X_r' X_s ,$$

et le potentiel démographique  $P$  qui s'écrit (§ IX):

$$P = \sum_1^n \beta_r \varepsilon_r X_r + \frac{1}{2} \sum_r \sum_s c_{rs} X_r X_s$$

où

$$c_{rs} = c_{sr} .$$

Alors en introduisant la fonction

$$\Phi = \sum_1^n \beta_r X'_r \log X'_r + \frac{1}{2} Z + P$$

on peut mettre les équations fondamentales (3) sous la forme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial X'_r} - \frac{\partial \Phi}{\partial X_r} = 0, \quad (6)$$

qui est la forme eulérienne des équations du calcul des variations.

L'importance de cette transformation consiste dans le fait qu'elle relie la question de la lutte pour la vie à un problème du calcul des variations.

#### § XIV

Nous allons dire un mot en général au sujet de ce chapitre de l'analyse.

Le calcul différentiel est né du problème des maxima et minima des fonctions. Si une quantité variable est représentée par une fonction dérivable on trouvera ses maxima et ses minima en annulant sa dérivée. Mais il peut arriver que la dérivée s'annule sans que l'on ait à faire ni à un maximum ni à un minimum. On dit alors que la fonction est stationnaire.

C'est là le cas le plus simple, mais on peut avoir aussi à chercher des maxima ou des minima de quantités qui ne dépendent pas d'une ou de plusieurs variables, mais qui dépendent d'une courbe variable. C'est ainsi que se présente le problème de trouver la forme qu'il faut donner au profil d'un projectile pour qu'il rencontre la moindre résistance dans l'air, ou la forme qu'il faut donner à la courbe de descente d'un corps pesant pour que le temps de la chute soit un minimum. Le calcul qui traite de ces problèmes est le calcul des variations.

Or le problème général de la mécanique se réduit à un problème du calcul des variations. C'est Lagrange qui l'a vu d'une manière claire pour la première fois et le principe général correspondant a été formulé sous sa forme définitive par Hamilton, d'où son nom de *principe de Hamilton*.