Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES A LA BIOLOGIE

Autor: Volterra, Vito

Kapitel: § VII

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28039

Si on a trois espèces, dont la seconde dévore la première, la première dévore la troisième et la troisième la seconde, il viendra

$$\frac{\beta_1}{N_1}\frac{dN_1}{dt} = a + qN_3 - rN_2 , \qquad \frac{\beta_2}{N_2}\frac{dN_2}{dt} = b + rN_1 - pN_3 ,$$

$$\frac{\beta_3}{N_3}\frac{dN_3}{dt} = c + pN_2 - qN_1 \tag{2'}$$

où a, b, c remplacent $\varepsilon_1 \beta_1$, $\varepsilon_2 \beta_2$, $\varepsilon_3 \beta_3$, tandis que p, q, r remplacent a_{23}, a_{31}, a_{13} et où tous ces coefficients sont positifs.

Et ainsi de suite car on peut multiplier les exemples autant que l'on veut.

Ces équations jouent dans la dynamique démographique un rôle analogue aux équations de Lagrange dans la dynamique des corps.

Un simple examen de ces équations au point de vue analytique nous révèle une propriété très importante; c'est le *principe de la conservation des espèces.* On peut l'énoncer en disant que: *si une espèce existe à un certain instant, elle existera toujours et aura toujours existé.*

Il ne faut pas s'étonner de ce résultat qui, au premier abord, peut paraître paradoxal; il faut tenir compte du fait que les associations que nous envisageons sont des êtres idéaux tout à fait comparables aux êtres théoriques utilisés depuis longtemps dans les autres sciences et que l'on définit par une idéalisation des êtres réels. C'est ainsi qu'on suppose en mécanique rationnelle que les corps solides sont indéformables, que les contacts ont lieu sans frottement; et il est bien connu que pour pouvoir appliquer les mathématiques, une telle idéalisation est nécessaire, c'est-à-dire qu'il est nécessaire d'attribuer des propriétés absolues aux êtres qu'on étudie. Ces propriétés ne sont réalisées que d'une manière approchée dans le monde réel.

D'autre part, même dans le cas théorique traité, le nombre des individus d'une espèce peut se réduire à zéro, mais il faut pour cela un temps infiniment long. Dans ce cas on dit que *l'espèce s'épuise.*

§ VII

Dans bien des cas il est préférable de mettre les équations générales sous une autre forme. Il faut pour cela introduire un nouveau concept destiné à jouer un rôle important en statistique; c'est la *quantité de vie*.

Rapportons-nous à une représentation graphique: dans une bande verticale correspondant à un certain milieu, dessinons des bandes horizontales égales et consécutives qui correspondent à des années qui se suivent les unes les autres en partant d'une bande qui est à l'origine des temps. Menons des segments verticaux, chacun desquels part de l'année où commence la vie de chaque individu d'une certaine espèce, vivant dans le milieu envisagé, et continue pendant toute sa vie en s'arrêtant à l'année où finit son existence. La vie de chaque individu est mesurée par le nombre des bandes horizontales rencontrées par chaque segment et, à la fin d'un certain temps, on peut regarder le nombre total de ces rencontres comme exprimant la quantité de vie de l'espèce à partir de l'origine des temps jusqu'à l'année où l'on s'est arrêté.

Le nombre des rencontres d'une bande horizontale avec les segments verticaux donne la population de l'espèce dans l'année correspondant à cette bande. Par suite, la somme des populations des diverses années depuis l'origine des temps jusqu'à une certaine année est égale à la totalité des rencontres que nous venons de considérer. Elle peut être regardée comme la *mesure de la quantité de vie* de l'espèce pendant la même durée de temps.

Si l'on appelle N_h la population dans l'année h,

$$\sum_{1}^{m}{}_h N_h ,$$

exprime la quantité de vie de l'espèce depuis l'origine des temps jusqu'à l'année m. Si l'on passe du discontinu au continu en appelant $N(t)$ la population au temps t,

$$X = \int_0^t N(t)\, dt$$

exprime la quantité de vie de l'espèce pendant l'intervalle de temps $0, t$. On peut s'attacher dans les calculs statistiques indifféremment à la considération de N ou à celle de X car ces quantités sont liées entre elles par les relations

$$X = \int_0^t N(t)\,dt\ , \qquad N = \frac{dX}{dt} = X'\ .$$

Revenons aux n espèces ayant les populations $N_1, N_2, \dots N_n$. Leurs quantités de vie sont

$$X_1 = \int_0^t N_1(t)\,dt\ , \qquad X_2 = \int_0^t N_2(t)\,dt\ , \ \dots\ X_n = \int_0^t N_n(t)\,dt$$

et en introduisant les éléments

$$X_1\,,\ X_2\,,\ \dots\ X_n\ ; \qquad X'_1 = N_1\,,\ \ X'_2 = N_2\,,\ \dots\ X'_n = N_n$$

on peut remplacer les équations (1′) par les suivantes

$$\beta_r \frac{d^2 X_r}{dt^2} = \left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n{}_s a_{sr} X'_s\right) X'_r\ . \tag{3}$$

Nous verrons tout à l'heure que la substitution des équations (3) aux équations (1′) est bien loin d'être une substitution banale comme il pourrait paraître au premier abord.

§ VIII

Dans l'étude des équations (1), la première question qui se pose est de chercher les conditions dans lesquelles les populations restent constantes.

Ce sont les conditions d'*équilibre* ou de l'*état stationnaire.*

Ces conditions sont

$$\left(\varepsilon_r \beta_r + \sum_1^n{}_s a_{sr} N_s\right) N_r = 0$$

les racines de ces équations étant positives. Nous pouvons supposer, par exemple, $N_r = 0$; mais dans ce cas, en vertu du