Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 36 (1937)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES PROPRIETIES INFINITÉSIMALES DES ENSEMBLES FERMÉS ET LE PRINCIPE INDUCTIF DE L'ENLACEMENT

Autor: Kaufmann, B.

Kapitel: I. — Propriétés locales d'origine intégrale.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28024

qui soit celle de l'un des vecteurs de ce point: ce serait le premier pas fait en vue de conférer à $\mathcal{V}$ une microstructure affine et d'apprendre à y définir, en chaque point d'accumulation, le ptg. d'un ensemble ponctuel, ou ce qui peut être plus commode, le ptg. mixte de deux ensembles ponctuels ayant un point d'accumulation commun[35]. Pour être utile, une telle théorie devrait aboutir à l'existence de systèmes réguliers de coordonnées curvilignes dans la variété, systèmes dont la représentation analytique rencontrée au nº 18 admet *a priori* l'existence.

Ces indications suggèrent l'importance de tout ce qui reste à faire en pareille matière. Et cependant avons-nous ici laissé de côté bien des questions essentielles, telles les relations de la théorie des surfaces avec la théorie de la mesure, relations dont l'importance apparaît de plus en plus nette[36].

SUR LES PROPRIÉTÉS INFINITÉSIMALES DES ENSEMBLES FERMÉS ET LE PRINCIPE INDUCTIF DE L'ENLACEMENT[1]

PAR

B. KAUFMANN (Leeds).

I. — PROPRIÉTÉS LOCALES D'ORIGINE INTÉGRALE.

1. — Essayons de donner les caractéristiques de la topologie générale. Etant donné ce que cette science représente aujourd'hui on serait porté à considérer comme son problème principal l'examen par les méthodes de la topologie combinatoire des espaces les plus généraux et en particulier des ensembles fermés.

---

[35] On devrait respecter la condition d'après laquelle le ptg. mixte de E et de $F_1 + F^2$ est la réunion des ptg. mixtes de E, F_1 d'une part, et de E, F_2 d'autre part.

[36] Voir sur ce point la thèse de M. Georges DURAND (Paris, 1931, ou *Journ. de Math.*, 9me série, t. XI, 1931) et l'important mémoire déjà cité de MM. H. BUSEMANN et W. FELLER (*Acta Math.*, t. 66, paragraphes 4, 5, 6). — Pour l'élimination des espaces usuels, voir PAUC, *Bull. Ac. Sc. Belg.*, août 1936.

[1] Conférence faite le 23 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

En effet, ces dernières années la topologie générale s'est très sensiblement rapprochée de la topologie combinatoire. Cependant, une différence importante subsiste entre ces deux disciplines très liées et c'est une différence de principe. On peut facilement la réduire à un seul fait.

La topologie combinatoire construit ses objets d'après certaines règles d'incidence à partir d'un nombre fini ou dénombrable d'éléments que l'on appelle des simplexes ou des cellules. Pour la plupart des problèmes il est indifférent si ces éléments sont géométriquement définis ou conçus d'une manière abstraite comme des schémas combinatoires. En tous cas cette construction fournit d'une manière univoque: les relations d'incidence ou de frontière, les possibilités de subdivisions successives ou de triangulations des configurations en d'autres équivalentes (ou homologues), etc.

La situation dans la topologie générale est tout à fait différente. Les ensembles fermés ne sont d'abord que des assemblages amorphes et essentiellement continus de points; il n'y a point d'éléments du genre des simplexes à l'exception de ceux à 0 dimensions, à savoir des points. Par conséquent il n'existe pas de subdivisions simples, de relations d'incidence, etc. Les subdivisions usuelles fournissent des éléments qui eux-mêmes n'ont pas de forme non plus, moins encore que l'ensemble lui-même. Cette différence fondamentale quoique évidente est décisive pour la mise en problèmes de la topologie générale, elle explique même son développement actuel.

Il est bien connu que la possibilité d'une application des méthodes combinatoires subsiste malgré cela. Elle se base sur l'idée d'approximations. On part des subdivisions suffisamment fines d'un ensemble F, subdivisions qui découlent des théorèmes de recouvrement, ou encore d'un réseau fini (ou dénombrable) de points (simplexes 0-dimensionnels) distribués régulièrement sur F; une seule règle, à savoir celle qui affirme que $r + 1$ éléments ayant un point commun [1] déterminent un simplexe à r dimensions, permet de construire les complexes d'approxima-

[1] Dans le cas d'un réseau ponctuel c'est un réseau partiel formé de $r + 1$ points et dont l'enveloppe convexe a un diamètre donné, qui détermine un simplexe r-dimensionnel.

tion (les nerfs). Les subdivisions successives de l'ensemble F donnent une suite de complexes d'approximation. Alors, une approximation suffisamment poussée permet de déceler la parenté entre les complexes et l'ensemble lui-même. Le succès de ces méthodes est bien connu. Elles ont permis de définir pour les ensembles fermés les relations d'homologie, les ordres de connexion et les nombres de Betti pour un nombre arbitraire de dimensions, de généraliser les relations d'intersection et d'enlacement, d'établir et de démontrer les théorèmes correspondants de dualité et, enfin, d'obtenir plusieurs propriétés nouvelles des ensembles les plus généraux.

2. — J'ai voulu rappeler le développement de la topologie des ensembles fermés pour souligner quelques-uns de ses caractères auxquels on ne pense pas souvent.

L'un de ces caractères est *l'existence de nombreux problèmes qui ne peuvent pas se présenter en topologie combinatoire* et qui dans le cadre de cette dernière deviennent des énoncés évidents et triviaux *bien qu'ils découlent en topologie des ensembles de théorèmes combinatoires de toute importance.*

Ces problèmes spécifiques à la topologie générale peuvent être très intéressants et très profonds sans avoir de pendant dans la topologie cellulaire. Le problème de la dimension en est un exemple. Représentons-nous, par exemple, les énoncés suivants pour le complexe r-dimensionnel K^r : K^r contient un cycle $(r - 1)$-dimensionnel homologue à 0, K^r est un « obstacle d'homologie » à r dimensions, K^r contient une multiplicité de Cantor à r dimensions, etc. A tous ces énoncés qui sont bien triviaux dans le cadre de la topologie cellulaire correspondent des résultats importants et intéressants dans la topologie générale. Songeons seulement que ces résultats découlent des théorèmes de dualité ou peuvent être ramenés à eux.

Une autre propriété remarquable de la topologie générale se rapporte à son développement et se manifeste par la *prépondérance de résultats globaux.* Les complexes d'approximation permettent d'appliquer les invariants combinatoires à l'ensemble et puisque ces invariants sont des propriétés globales pour les complexes, ils le sont à plus forte raison pour les ensembles.

La parenté mentionnée ci-dessus entre les ensembles et les complexes d'approximation est une parenté globale. Même les transformations d'un ensemble F à r dimensions en un complexe K^r à r dimensions — d'après le théorème de transition de M. Alexandroff — transformations qui sont certainement des processus localement définis, expriment uniquement une parenté globale. *Généralement l'approximation ne confère pas les propriétés locales des complexes à l'ensemble.*

3. — Pour cette raison il semble désirable de distinguer nettement entre elles les propriétés locales d'un ensemble F donné dans un espace R. P étant un point de F il est d'usage d'appeler *local* un énoncé ou une propriété E de F se rapportant à un voisinage U de P dans l'espace R. Si le même énoncé E se rapporte à un voisinage arbitrairement petit du point P, on pourrait l'appeler une propriété *infinitésimale* de F. Mais d'avoir formé ces notions ne permet pas encore d'obtenir les caractères distinctifs des propriétés locales d'un ensemble. Je crois cependant qu'il existe deux types essentiellement différents de ces propriétés.

Nous voulons ici nous restreindre aux énoncés qui sont des théorèmes, c'est-à-dire à des énoncés qui se démontrent.

Soit (B) un système d'hypothèses dont, par une démonstration, découle un énoncé ou une propriété E; désignons la démonstration par (B) $\rightarrow$ E (F).

U *étant un voisinage dans* R *d'un point* P *de* F, *nous appellerons*[1] E (U) *une propriété locale ordinaire de* F *si sa démonstration* (B) $\rightarrow$ E (F) *ne contient pas non plus d'hypothèses essentielles dans* R — $\overline{\mathrm{U}}$. *Si un même énoncé* E (U_n) *reste vrai pour une suite* (U_n) *de voisinages convergeant en un point* P *de* F *et si la démonstration* (B) $\rightarrow$ E (U_n) *reste pour chaque* n *intérieure à* U_n, *alors nous parlerons d'une propriété infinitésimale ordinaire de* F *relatif à* P.

Dans les cas suivants cependant on se trouve en présence de faits tout à fait différents.

---

[1] Si un énoncé ou une propriété E se rapporte à un ensemble F nous écrivons aussi brièvement E (F). Si U est un voisinage dans l'espace R, E (U) désigne que l'énoncé E (F) contient au moins un énoncé essentiel pour U.

Si la démonstration (B) $\rightarrow$ E(U) *nécessite des hypothèses essentielles dans* R — $\overline{\mathrm{U}}$ *et en particulier si elle doit se servir essentiellement d'endroits intérieurs à* R — $\overline{\mathrm{U}}$, *alors nous appellerons* E (U) *une propriété locale* (*de* F) *d'origine intégrale.* Et, d'une façon analogue, si E(U_n) est un énoncé vrai pour un voisinage arbitrairement petit U_n *de* P *et s'il existe un voisinage fixe* U_δ *tel que* (B) $\rightarrow$ E(U_n) *reste vrai pour chaque* n, *des hypothèses essentielles étant données dans* R — U_δ, *alors nous appelons* E *une propriété infinitésimale* (*de* F) *d'origine intégrale.*

Les propriétés locales (ou infinitésimales) d'origine intégrale peuvent notamment s'exprimer (totalement ou en partie) par les énoncés dans R — $\overline{\mathrm{U}}$, malgré qu'elles se rapportent *immédiatement*[1] à U. Si c'est le cas, alors nous parlons d'énoncés locaux (ou infinitésimaux) de caractère intégral. Evidemment, ces énoncés peuvent être en même temps envisagés comme des énoncés globaux. L'on constate aisément qu'un énoncé de caractère intégral doit être nécessairement d'origine intégrale (mais pas réciproquement).

Les propriétés locales et notamment les propriétés infinitésimales d'origine intégrale sont caractéristiques pour la topologie des ensembles fermés. Mais on voit immédiatement qu'il s'agit seulement d'une formation relative des notions. La distinction entre les propriétés ordinaires ou d'origine intégrale dépend non seulement d'un certain système (B) d'hypothèses, mais aussi des démonstrations elles-mêmes[2]. Je crois cependant qu'il est un principe de travail utile et de grande actualité de former ces notions malgré qu'elles ne requièrent pas, au moins sous cette forme, de rigueur mathématique ou même philosophique.

4. — Je voudrais encore compléter ces considérations sur les propriétés locales et infinitésimales des ensembles fermés en soulignant les deux (ou trois) attitudes qu'on peut prendre

---

[1] La définition de propriété locale n'exclue point que l'énoncé E (U) contienne en même temps des énoncés dans R — $\overline{\mathrm{U}}$. Cela n'est exclu que pour le cas des propriétés locales ordinaires. Considérons par exemple l'énoncé suivant : « (B) entraîne que tous les couples de points dans U peuvent être reliés par un arc dans F tel qu'il rencontre des points dans R — $\overline{\mathrm{U}}$ ».

[2] Seuls les énoncés de caractère intégral sont indépendants des démonstrations.

vis-à-vis d'elles, attitudes entraînées par les problèmes eux-mêmes.

L'une de ces attitudes est déterminée par le désir de caractériser entre les ensembles et les espaces les plus généraux ceux qui présentent les propriétés déjà connues des formations cellulaires (des multiplicités, des espaces de Poincaré, des sphères). Ces problèmes sont aussi très importants pour la topologie combinatoire puisqu'ils permettent d'étendre son domaine de validité. La résolution de ces problèmes s'obtient en posant des conditions nécessaires et suffisantes de genre généralement local, qui garantissent la possibilité de la structure cellulaire. On a une très grande liberté dans le choix de ces conditions et l'intuition est d'un grand secours. *A priori* au moins, ces conditions peuvent aller des tautologiques jusqu'aux très profondes. Le principe directeur est évidemment le suivant, si l'on envisage un but concret: *moins on pose d'hypothèses, plus la portée des conditions s'étend.* Comme exemple citons le problème de la généralisation de la notion de multiplicité, dont on s'est beaucoup occupé ces dernières années (Van Kampen, Pontrjagin, Alexander, Lefschetz) ou encore le problème de caractériser la sphère à n dimensions. On peut aujourd'hui poser des conditions nécessaires et suffisantes pour l'homéomorphie d'un espace et d'une sphère, mais on pourrait aussi en poser assez peu pour rendre le problème extrêmement difficile, comme c'est le cas avec l'hypothèse de Poincaré. Comme problème très relié à ce dernier, mais plus profond encore, citons le problème de la réciproque du théorème Jordan-Brouwer dans les espaces à quatre ou plus dimensions (à savoir de caractériser la sphère par les propriétés de l'espace complémentaire).

Une attitude foncièrement différente doit être adoptée si l'on se donne un objet géométrique (aussi général que possible) et si l'on cherche des propriétés nouvelles de cet objet. Si, dans cette attitude, nous définissons la propriété d'une façon *abstraite* ou bien si nous formons de nouvelles notions, le critère est opposé: plus la notion formée, qui exprime des propriétés nouvelles de l'objet, est tranchante, plus sa portée est grande. Dans la topologie des ensembles on trouve tant d'exemples de ce fait qu'il nous semble inutile d'insister. Ce critère oblige aussi à *justifier* une notion nouvellement introduite et cela par l'indication de sa signification pour une classe d'objets donnée *indépendamment de cette notion* et aussi générale que possible.

Enfin, je mentionnerai encore une troisième attitude: par des définitions (des axiomes) on peut déterminer une nouvelle classe d'objets satisfaisant aux conditions données. Ensuite on examine d'autres propriétés de l'objet. Pour cette attitude il ne faut pas oublier que le nouvel objet dépend généralement des définitions. Cette attitude est d'usage pour établir une théorie abstraite nouvelle et le développement cohérent de cette théorie doit la justifier. Pratiquement, elle est suggérée par le désir d'étudier les problèmes difficiles d'homéomorphie et d'homotopie au moins dans des conditions plus spéciales et plus faibles. Les trois attitudes sont courantes dans la topologie.

II. — Le principe inductif de l'enlacement.

5. — Les pages suivantes seront consacrées à un bref exposé de la théorie infinitésimale des ensembles les plus généraux. Il s'agira sans exception de propriétés d'*origine intégrale* dans le sens du critère énoncé plus haut. Ce sont, d'ailleurs, les résultats d'une suite de recherches que j'avais abordées dans les dernières années et qui, je crois, font connaître pour le moment plusieurs nouvelles relations importantes pour la structure infinitésimale des ensembles. Je voudrais d'ailleurs me restreindre aux questions de principe de ces recherches. La compréhension et la classification de ces principes nous sera facilitée si nous retenions quelques phases du développement de la topologie générale. On peut noter, je crois, trois moments critiques, décisifs pour ce développement.

Le premier moment critique s'est présenté le jour où l'on s'est rendu compte de l'*importance des relations d'enlacement pour la topologie générale.* On avait reconnu notamment que la décomposition d'un espace par un ensemble n'était qu'un cas particulier d'enlacement de l'ensemble avec un cycle de dimension duelle. On sait que cette découverte est due à MM. Lebesgue