

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1936)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** TOPOLOGÏE DES TRANSFORMATIONS DES SURFACES  
**Autor:** Nielsen, Jakob  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27317>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 27.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# TOPOLOGIE DES TRANSFORMATIONS DES SURFACES <sup>1</sup>

PAR

Jakob NIELSEN (Copenhague).

1. — On ne connaît pas, jusqu'à présent, un système complet d'invariants pour les classes de représentations des surfaces. Cependant, les recherches faites dans cet ordre d'idées permettent d'introduire une série de notions et d'établir une suite de théorèmes formant la première étape de la solution de ce problème général. Dans cette communication je me borne à traiter les transformations topologiques (c'est-à-dire biunivoques et continues) à indicatrice invariante d'une surface fermée et bilatère de genre  $p > 1$  en elle-même. Pour ce cas restreint on trouve tous les détails et les démonstrations des théorèmes énoncés dans trois mémoires insérés dans les *Acta mathematica* <sup>2</sup>.

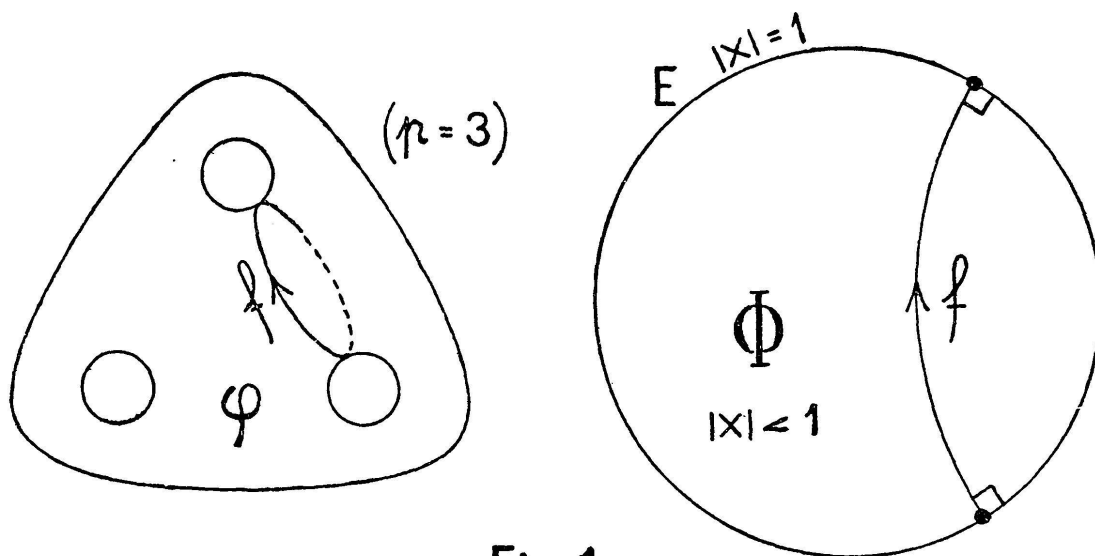


Fig. 1

<sup>1</sup> Conférence faite le 23 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

<sup>2</sup> J. NIELSEN, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, I, II, III. *Acta mathematica*, t. 50, 53, 58.

2. — Soit  $\varphi$  une surface bilatère fermée de genre  $p > 1$ . Soit  $E$  le cercle d'unité dans le plan de la variable complexe  $x$ . On sait qu'on peut représenter la surface de recouvrement universel de  $\varphi$  sur l'intérieur  $\Phi$  de  $E$  de sorte que les opérations du groupe fondamental (groupe de H. POINCARÉ)  $F$  de  $\varphi$  soient représentées par des substitutions homographiques de  $x$  du type hyperbolique. Soit  $f$  une opération de  $F$ ; la substitution homographique  $f(x)$  laisse invariants deux points de  $E$ , qui seront appelés *les points fondamentaux* de  $f$ . Empruntons les notions de la géométrie non-euclidienne:  $f$  est une translation du plan hyperbolique  $\Phi$  le long d'une droite de ce plan. Celle-ci se représente par un arc de cercle orthogonal à  $E$  et joignant les points fondamentaux de  $f$ ; cette droite sera appelée *l'axe* de  $f$ . Transportant à  $\varphi$  la mesure non-euclidienne de  $\Phi$ , les arcs de cercle orthogonaux à  $E$  correspondent aux lignes géodésiques de  $\varphi$ , et, en particulier, les axes de  $F$  aux lignes géodésiques fermées sur  $\varphi$ .

Les points fondamentaux de  $F$  forment un ensemble dénombrable et partout dense sur  $E$ . Au surplus, étant donnés deux intervalles quelconques sur  $E$ , il y a dans  $F$  un axe aboutissant à ces deux intervalles.

3. — Désignons par  $\tau\varphi$  une transformation topologique de la surface  $\varphi$  en elle-même. Une transformation topologique  $t\Phi$  du disque circulaire  $\Phi$  en lui-même correspond à  $\tau\varphi$ , si chaque système complet de points de  $\Phi$ , équivalents par  $F$  et correspondant au point  $a$  de  $\varphi$ , est transformé par  $t$  en un système de points équivalents correspondant au point  $\tau a$  de  $\varphi$ . Donc la fonction  $t(x)$ , qui décrit cette transformation de  $\Phi$ , doit satisfaire à une équation fonctionnelle

$$t(f(x)) = f'(t(x))$$

pour chaque élément  $f$  de  $F$ , la fonction  $f'$  désignant aussi un certain élément de  $F$ . La correspondance  $f \rightarrow f'$  est un automorphisme  $J$  du groupe  $F$ . Si  $f_j$  désigne l'élément de  $F$  correspondant à  $f$  par l'automorphisme  $J$ , l'équation fonctionnelle ci-dessus prend la forme

$$tf = f_j t$$

ou bien

$$tft^{-1} = f_j .$$

On détermine complètement ce système d'équations fonctionnelles pour la fonction  $t$  en substituant pour  $f$  un système de générateurs du groupe  $F$ .

La transformation  $t\Phi$  n'est pas la seule transformation topologique de  $\Phi$  correspondant à la transformation  $\tau\varphi$ . La suite  $f_0 = 1, f_1, f_2, \dots$  étant une énumération des éléments de  $F$ , il est manifeste que les fonctions  $f_1 t\Phi, f_2 t\Phi, \dots$  fournissent aussi  $\tau\varphi$ . Évidemment la fonction  $f_1 t$  satisfait à l'équation fonctionnelle

$$f_1 tft^{-1} f_1^{-1} = f_1 f_j f_1^{-1} .$$

Donc l'automorphisme de  $F$  correspondant à  $f_1 t$  est  $f \rightarrow f_1 f_j f_1^{-1}$ .

L'ensemble des automorphismes provenant des fonctions  $f_j t\Phi$  s'appelle une *famille d'automorphismes*; deux membres d'une famille diffèrent par un automorphisme cogrédié.

En déformant d'une manière continue la transformation  $\tau\varphi$  on conserve la validité des équations fonctionnelles. La famille d'automorphismes de  $F$  correspond donc à la *classe* de la transformation  $\tau$ .

4. — Voici une conséquence des équations fonctionnelles: La transformation  $t\Phi$  détermine par continuité une transformation topologique  $tE$  de la circonférence  $E$  (conservant le sens de  $E$ ) de sorte qu'on obtienne une transformation topologique  $t(\Phi + E)$  du disque fermé  $\Phi + E$ . Les points fondamentaux de  $f$  correspondent aux points fondamentaux de  $f_j$  et, puisque les points fondamentaux de  $F$  sont partout denses sur  $E$ , cette correspondance suffit pour déterminer  $tE$ . Soit inversement  $J$  un automorphisme  $f \rightarrow f_j$  de  $F$ ; la correspondance entre les points fondamentaux de  $f$  et de  $f_j$  fournie par  $J$  conserve l'ordre cyclique des points fondamentaux sur  $E$ , donc on obtient une transformation topologique  $tE$ , et celle-ci fait partie d'une transformation topologique  $t(\Phi + E)$  correspondant à une transformation  $\tau\varphi$ . Il y a donc une correspondance *biunivoque*

entre les familles d'automorphismes de  $F$  et les classes de transformations de  $\varphi$ .

5. — Déformons la transformation  $\tau\varphi$  d'une manière continue: l'automorphisme  $J$  étant conservé, la correspondance des points fondamentaux sur  $E$  ne change pas, donc la transformation  $tE$  n'est pas changée, bien que la transformation  $t\Phi$  subisse une déformation. Cela reste vrai même si la déformation de  $\tau$  ne conserve pas le caractère topologique de cette transformation. On a donc le résultat suivant: *Le système de transformations topologiques*

$$tE, f_1 tE, f_2 tE, \dots$$

*de la circonférence  $E$  est un invariant de la classe de transformations continues de degré  $+1$  de la surface  $\varphi$ .* En cherchant des invariants de classe on se trouve donc porté à regarder des représentations topologiques à une dimension au lieu des représentations continues à deux dimensions.

6. — Nous allons étudier la transformation  $tE$ . Soit  $M$  l'ensemble des points, qui sont invariants par cette transformation. D'abord les points fondamentaux de tous les éléments  $h$  de  $F$ , qui sont invariants par l'automorphisme  $J$ , font partie de  $M$ . Soit  $H$  le sous-groupe de  $F$  formé par ces éléments invariants. Soit  $S$  la fermeture de l'ensemble des points fondamentaux de  $H$ . Alors  $S$  est un sous-ensemble de  $M$ , qui sera appelé *l'ensemble singulier*. Tout autre point de  $E$  sera appelé *régulier*. Les points réguliers forment un ensemble ouvert sur  $E$  consistant *d'intervalles de régularité*. Pour un point régulier il existe un voisinage, qui ne contient aucune paire de points équivalents par  $H$ . Chaque voisinage d'un point de  $S$ , au contraire, contient deux points, qui se correspondent par un élément de  $H$ . Les cas suivants peuvent alors de présenter:

I.  $H = F$  (cas où  $\tau\varphi$  appartient à la classe de l'identité). Tous les points fondamentaux de  $F$  sont invariants par  $t$ , donc  $S$  est identique à  $E$  et il n'y a pas de points réguliers.

II.  $H = 1$ . Tous les éléments de  $F$  autres que l'identité sont

changés par l'automorphisme  $J$ . Tous les points de  $E$  sont réguliers,  $S$  est vide.

III.  $H$  est un groupe cyclique infini. Tous les éléments de  $H$  appartiennent au même axe, donc ils sont les puissances de la plus courte translation dans  $F$  appartenant à cet axe.  $S$  est composé de deux points, il y a deux intervalles de régularité.

IV. Les éléments de  $H$  appartiennent à plusieurs axes sans que  $H$  soit identique à  $F$ . Dans ce cas le groupe  $H$  est un groupe libre, dont le nombre  $\nu$  de générateurs est inférieur à  $2p$ . Il y a dans  $H$  une infinité d'axes. L'ensemble  $S$  est parfait et partout non dense; c'est-à-dire que les intervalles de régularité forment un ensemble partout dense sur  $E$  et que deux intervalles de régularité n'aboutissent jamais au même point singulier. Traçons la droite (arc de cercle orthogonal à  $E$ ) joignant les extrémités d'un intervalle de régularité et enlevons de  $\Phi$  le demi-plan limité par cette droite et par l'intervalle en question. Faisons de même pour tous ces intervalles. Il nous reste un domaine  $\Delta$ , convexe au sens de la géométrie non-euclidienne et limité sur  $E$  par l'ensemble  $S$ . Ce domaine  $\Delta$  qui sera appelé *domaine central*,

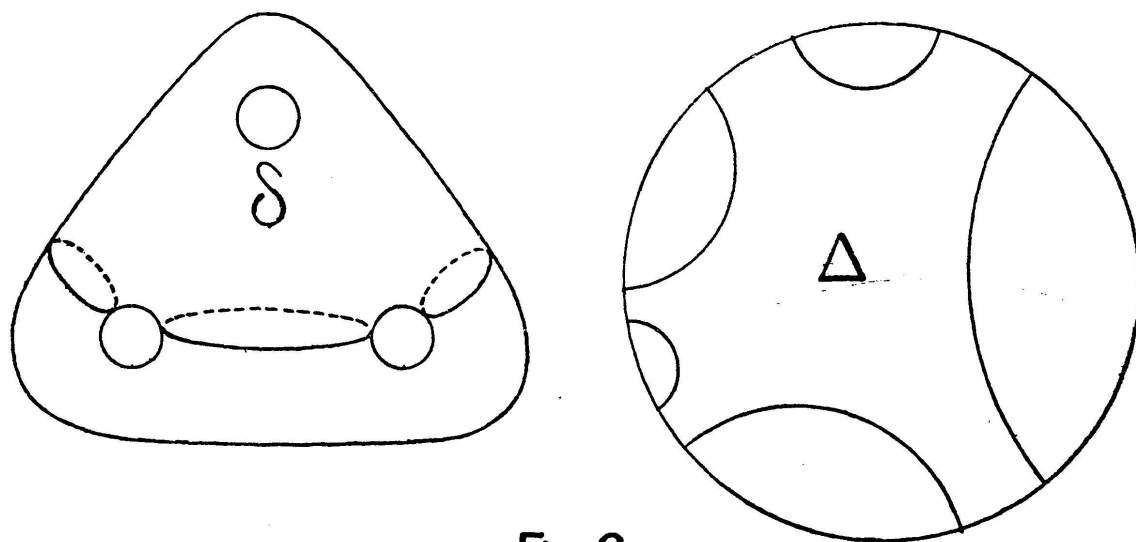


Fig.2

est doué des propriétés suivantes:  $\Delta$  contient tous les axes de  $H$ , et tout axe entièrement contenu dans  $\Delta$  est un axe de  $H$ . Les droites limitant  $\Delta$  sont, elles aussi, des axes de  $H$ , et les lignes géodésiques fermées sur  $\varphi$ , qui leur correspondent, n'ont pas de points doubles et ne se coupent pas deux à deux. Le nombre de

ces géodésiques sur  $\varphi$  est fini (le genre de  $\varphi$  étant fini), donc parmi les côtés de  $\Delta$  (en nombre infini) il n'y a qu'un nombre fini de non-équivalents par  $F$ , et même par  $H$ . Les opérations de  $H$  transforment  $\Delta$  en lui-même, les autres opérations de  $F$  transforment  $\Delta$  en un domaine hors de  $\Delta$ . Au domaine  $\Delta$  de  $\Phi$  correspond sur  $\varphi$  un domaine  $\delta$  limité par un nombre fini de géodésiques fermées simples.  $H$  est le groupe fondamental de  $\delta$ , et  $\Delta$  est la surface de recouvrement universel de  $\delta$ . De là il résulte que  $H$  est libre avec le nombre de générateurs

$$\nu = 2q + r - 1$$

$q$  étant le genre et  $r$  le nombre des contours du domaine  $\delta$ .

Remarquons que, dans le cas III,  $H$  est un groupe libre avec un générateur. Pour unifier le langage nous appellerons (dans le cas II) un groupe, qui ne consiste que de l'identité, « un groupe libre avec le nombre nul de générateurs ».

7. — L'ensemble  $M - S$  consiste de points de  $E$ , réguliers, invariants par  $t$ . On trouve: Les points d'accumulation de  $M - S$  sont des points de  $S$ . Or, si  $M$  n'est pas vide, les points de  $E - M$  forment des intervalles, les points d'un tel intervalle étant transportés par  $t$  dans une direction bien déterminée. On peut donc, par rapport à  $t$ , distinguer les extrémités d'un tel

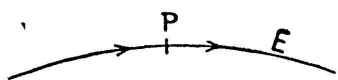


Fig. 3

intervalle comme *point attractif* et *point répulsif*. Nous avons dit qu'un point de  $M - S$  est isolé. Il est donc extrémité de deux intervalles. On trouve qu'il est attractif pour les deux intervalles ou répulsif pour les deux intervalles. Le cas indiqué pour  $P$  par la figure 3 ne peut donc pas se présenter pour un point régulier de  $M$ .

Envisageons maintenant un intervalle de régularité, limité par l'axe d'un certain élément  $h$  de  $H$ , et contenant des points de  $M$ , donc de  $M - S$ . Le groupe  $H$  transformant l'ensemble  $M$  en lui-même et des points attractifs en des points attractifs (en vertu de l'équation fonctionnelle), il suffit de regarder dans cet intervalle un segment, dont les extrémités se correspondent

par l'opération  $h$ , tel que le segment  $(P, hP)$  de la figure 4. Sur ce segment il n'y a qu'un nombre fini de points de  $M$  ( $S_1$  et  $S_2$  étant les seuls points d'accumulation pour les points de  $M$  dans  $S_1 S_2$ ) et puisque les points attractifs doivent alterner avec des points répulsifs, ce nombre est pair. Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'intervalles de régularité non équivalents, on trouve, en somme, que le nombre de points non équivalents dans  $M - S$  est un nombre fini et pair, soit  $2\mu$ .

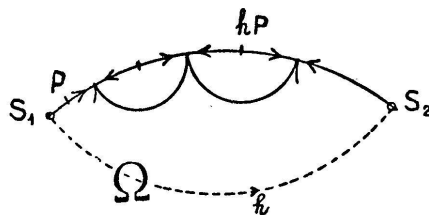


Fig.4

8. — Soit  $M^*$  le sous-ensemble de  $M$ , qu'on obtient en supprimant dans  $M$  tous les points isolés et répulsifs. Faisons jouer à  $M^*$  le rôle attribué plus haut à  $S$  à l'occasion de la définition du domaine  $\Delta$ : En enlevant les demi-plans limités par les intervalles de  $E - M^*$  on obtient un domaine convexe  $\Omega$ , qui sera appelé *domaine principal* (Voir la figure 4.).  $S$  étant un sous-ensemble de  $M^*$ , le domaine central  $\Delta$  est renfermé par le domaine principal  $\Omega$ . Les éléments du groupe  $H$  transforment  $\Omega$  en lui-même. L'axe d'un élément  $f$  de  $F$ , qui ne fait pas partie de  $H$ , est dirigé vers un point d'un intervalle de  $E - M^*$ , et l'opération  $f$  transforme  $\Omega$  en un domaine entièrement contenu dans le demi-plan limité par cet intervalle, donc situé hors de  $\Omega$ . Il en résulte que les côtés de  $\Omega$ , qui ne sont pas en même temps des côtés de  $\Delta$ , correspondent sur  $\varphi$  à des géodésiques ouvertes sans points doubles et ne se coupant pas deux à deux ni avec les contours de  $\delta$ . Donc on obtient sur  $\varphi$  un domaine  $\omega$  (renfermant  $\delta$ ), dont  $\Omega$  est la surface de recouvrement universel et dont  $H$  est le groupe fondamental.

9. — Envisageons le cas II du n° 6.  $S$  étant vide,  $M$  ne contient qu'un nombre fini  $2\mu$  de points. Prenant comme unité d'aire non-euclidienne l'aire d'un triangle, dont tous les angles sont nuls; on a pour la surface  $\varphi$  une aire égale à  $4(p - 1)$ . Le domaine principal  $\Omega$ , étant un polygone de  $\mu$  côtés avec tous les angles nuls, a l'aire  $\mu - 2$ . Or,  $\Omega$  ne contient aucune paire de points équivalents, puisque tout élément de  $F$  ( $H$  étant 1),

transforme  $\Omega$  en un domaine hors de  $\Omega$ . Donc  $\omega$  a l'aire  $\mu - 2$ , et celle-ci ne peut pas dépasser l'aire de  $\varphi$ . On a donc

$$\mu \leq 4p - 2.$$

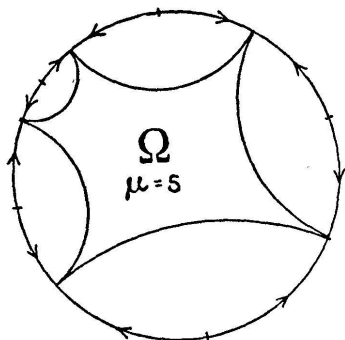


Fig. 5

Dans le cas d'un automorphisme sans élément invariant la transformation  $tE$  ne peut donc pas avoir plus de  $8p - 4$  points invariants.

Dans les cas III et IV du n° 6 on peut appliquer un raisonnement semblable. Exception faite du cas I, où  $H = F$ , on résume le résultat dans le théorème suivant:

Dans le cas d'un automorphisme non-identique, le nombre  $\nu$  des générateurs du groupe libre  $H$ , dont les éléments ne sont pas changés par l'automorphisme, et le nombre  $2\mu$  des points de  $E$ , invariants par  $t$ , réguliers et non équivalents, satisfont à la relation

$$0 \leq 2\nu + \mu \leq 4p - 2.$$

Cette inégalité ne peut pas être améliorée: On connaît des exemples pour chacun des signes d'égalité.

Puisque les nombres entiers  $\nu$  et  $\mu$  sont non-négatifs, on a obtenu ainsi une *classification des transformations  $t$  en un nombre fini de types* caractérisés par les valeurs de  $\nu$  et  $\mu$  selon l'inégalité citée.

10. — Soit  $a$  un point de  $\varphi$  invariant par la transformation  $\tau$  et  $A$  un point de  $\Phi$  correspondant à  $a$ . On doit avoir  $tA = fA$ ,  $f$  étant un certain élément de  $F$ . Alors  $A$  est invariant par la transformation  $f^{-1}t$ , équivalente à  $t$ , c'est-à-dire correspondant à la même transformation  $\tau\varphi$ . On introduit la notion de *classe de points invariants* de  $\tau\varphi$  en réunissant dans une classe tous ceux qui correspondent aux points invariants par une des transformations

$$t\Phi, f_1 t\Phi, f_2 t\Phi, \dots$$

Trois remarques alors se présentent:

1° Le groupe H transforme l'ensemble des points invariants de  $t\Phi$  en lui-même. La classe de points invariants réalisée par  $t\Phi$  se trouve donc représentée uniquement dans un domaine fondamental du groupe H dans  $\Phi$ .

2° Les points invariants de la transformation  $ftf^{-1}\Phi$  sont les transformés par  $f$  des points invariants de  $t\Phi$ . Ils représentent donc la même classe de points invariants de  $\tau\varphi$ . D'autre part, d'après l'équation fonctionnelle, on a

$$ftf^{-1} = ff^{-1}t.$$

Cette fonction, qui est un cas spécial d'une fonction équivalente à  $t$ , sera dite *congrue* à  $t$ . Dans la suite de toutes les fonctions équivalentes à  $t$  on n'a donc qu'à prendre une sous-suite, dont les membres ne sont pas congrus entre eux. Cette sous-suite est encore infinie, mais on trouve:

3° Il n'y a qu'un nombre fini de transformations équivalentes à  $t$  et non-congrues entre elles, qui possèdent des points invariants dans  $\Phi$ . Donc la transformation  $\tau\varphi$  n'a qu'un *nombre fini* de classes de points invariants.

11. — Soit  $x$  un point de  $\Phi + E$  non-invariant par  $t$ . La demi-droite non-euclidienne issue de  $x$  et dirigée vers  $tx$  rencontre E

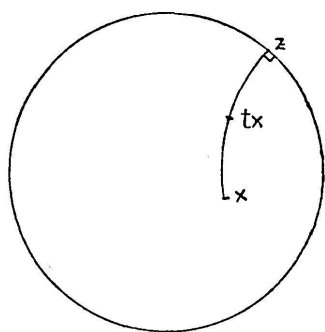


Fig. 6

dans un point  $z$ . (Pour  $|x| = 1$  le point  $z$  coïncide avec  $tx$ ). Faisons parcourir à  $x$  dans  $\Phi + E$  un chemin fermé évitant les points invariants par  $t$  et formant le contour d'un domaine fondamental de H. Le point  $z$  va faire sur la circonférence E un certain nombre  $j$  de tours complets, revenant finalement à sa position initiale. Pour ce nombre  $j$ , qui sera appelé *indice de la classe de points invariants* de  $\tau\varphi$  représentée par  $t\Phi$ , on calcule la valeur

$$j = 1 - \nu - \mu.$$

Dans le cas I du n° 6, pour lequel on n'a pas défini les nombres  $\nu$  et  $\mu$ , le calcul pour un domaine fondamental de F donne pour  $j$

la valeur  $2 - 2p$  conformément à la formule de M. BIRKHOFF<sup>1</sup>. Des bornes trouvées dans le n° 9 pour les nombres  $\nu$  et  $\mu$  on dérive pour  $j$  l'inégalité

$$-(4p - 3) \leq j \leq 1.$$

Dans le cas  $j \neq 0$  la transformation  $t\Phi$  a nécessairement des points invariants; la classe correspondante de  $\tau\varphi$  n'est pas vide. Nous dirons qu'une classe, dont l'indice  $j$  est différent de zéro, est une *classe essentielle*. Au contraire, si dans un cas  $j = 0$  la transformation  $t\Phi$  a des points invariants, nous appellerons la classe correspondante de  $\tau\varphi$  une *classe non-essentielle*. Dans le cas  $j = 0$  on a ou bien  $\nu = 1, \mu = 0$  ou bien  $\nu = 0, \mu = 1$ , donc toujours deux points invariants sur E.

Les nombres  $\nu$  et  $\mu$  étant dérivés de la transformation  $tE$ , qui est un invariant de la classe de transformations à laquelle appartient  $\tau\varphi$ , il est de même pour l'indice de la classe correspondante de points invariants. On pourra dire qu'on a résolu le problème des points invariants pour les classes de transformations de  $\Phi$  telles que  $t\Phi$ .

12. — Quant au problème analogue pour les classes de transformations de la surface fermée, on sait que les indices des classes essentielles de points invariants, soit

$$j_1, j_2, \dots, j_z$$

forment un système d'invariants pour la classe de  $\tau$ . Le problème, qui n'a pas été résolu complètement jusqu'à présent, est de déterminer ce système fini de nombres entiers non-nuls, étant donné un automorphisme de F déterminant la classe de  $\tau$ . On connaît cependant un invariant dû à M. ALEXANDER et dépendant du système des  $j$ , à savoir la somme

$$\Xi = j_1 + j_2 + \dots + j_z.$$

Pour calculer  $\Xi$ , on n'a qu'à choisir un système  $a_1, a_2, \dots, a_{2p}$

<sup>1</sup> G. D. BIRKHOFF, Dynamical systems with two degrees of freedom. *Transact. Amer. Math. Soc.*, vol. 18, p. 286 et sq.

de générateurs de  $F$ , formant en même temps une base pour le groupe d'homologie. Soient

$$a_{xJ} \sim \sum_{\lambda=1}^{2p} \gamma_{x\lambda} a_{\lambda} \quad x = 1, 2, \dots, 2p$$

les formules décrivant la transformation du groupe d'homologie, correspondant à l'automorphisme  $J$  donné; soit  $\Gamma$  la matrice formée par les  $\gamma_{x\lambda}$  et

$$s(\Gamma) = \sum_{\lambda=1}^{2p} \gamma_{\lambda\lambda} .$$

Alors on a d'après le théorème de M. ALEXANDER <sup>1</sup>

$$\Xi = 2 - s(\Gamma) .$$

Comment peut-on profiter, pour le problème général, de la connaissance de  $\Xi$  ?

D'abord, puisque  $j \leq 1$ , on a pour le nombre  $Z$  des classes essentielles l'inégalité

$$Z \geq \Xi$$

laquelle fournit, dans le cas  $\Xi > 0$ , une borne inférieure pour le nombre des classes essentielles, donc aussi une borne inférieure pour le *nombre minimum des points invariants* dans la classe envisagée de transformations. Pour obtenir une telle borne inférieure dans le cas  $\Xi < 0$ , on recourt aux domaines principaux  $\omega_1, \omega_2, \dots$  sur  $\varphi$ , qui correspondent à celles parmi les fonctions équivalentes à  $t$  qui fournissent un indice  $j < 0$ . Une analyse détaillée montre que ces domaines  $\omega_1, \omega_2, \dots$  ne se couvrent pas mutuellement sur  $\varphi$ , donc la somme de leurs aires ne peut pas dépasser l'aire de  $\varphi$ . Le calcul donne la formule

$$Z \geq -\Xi - 4(p - 1)$$

de sorte qu'on ait obtenu une borne inférieure dans le cas  $\Xi < -4(p - 1)$ . Dans le cas  $\Xi = 0$  on ne trouve rien par ces

<sup>1</sup> J. W. ALEXANDER, Invariant points of a surface transformation of given class. *Transact. Amer. Math. Soc.*, vol. 25.

moyens, et dans le cas  $-4(p-1) \leq \Xi \leq -1$  on ne conclut que  $Z \geq 1$ .

13. — Parmi les divers types de fonctions  $t$  donnant un indice  $j < 0$ , celui caractérisé par  $\nu = 0$ ,  $\mu = 2$  a un intérêt spécial. L'ensemble  $M^*$  se réduisant à deux points, le « domaine » principal se réduit à un arc de cercle orthogonal à  $E$ , donc  $\omega$  est une

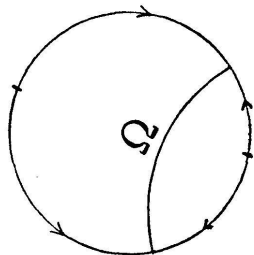


Fig. 7

géodésique ouverte sur  $\varphi$ . C'est le seul cas où le domaine principal occupe une aire de *mesure nulle* sur  $\varphi$ ; pour tous les autres types donnant  $j < 0$  l'aire de  $\omega$  est un entier positif. L'aire de  $\varphi$  étant connue, cela donne pour  $\Xi$  négatif et de grande valeur absolue le résultat suivant : Pour  $\Xi < -8(p-1)$  au moins  $|\Xi| - 8(p-1)$  des classes d'indice négatif sont issues d'un type  $\nu = 0$ ,  $\mu = 2$ , donc  $j = -1$ . Il peut se présenter que les domaines  $\omega$  d'aire positive ont la somme de leurs aires égale à l'aire de  $\varphi$ . Les géodésiques ouvertes représentant le  $\omega$  des types  $\nu = 0$ ,  $\mu = 2$  sont donc placées dans un certain ensemble de mesure nulle.

14. — Nous pouvons encore nous servir d'une méthode très efficace pour la topologie des transformations de surfaces, celle de l'itération de la transformation donnée  $\tau\varphi$ . Or,  $t\Phi$  correspondant à  $\tau\varphi$ , les transformations  $t^2\Phi$ ,  $t^3\Phi$ , ... correspondent à  $\tau^2\varphi$ ,  $\tau^3\varphi$ , .... Soit d'abord  $t\Phi$  d'un type  $\nu + \mu > 0$ , donc  $j \leq 0$ . Dans ce cas il y a sur  $E$  des points, qui sont invariants par  $t$ ; alors précisément les mêmes points sont invariants par  $t^2$ ,  $t^3$ , .... En d'autres termes, si  $M(t)$  n'est pas vide,  $M(t^2)$ ,  $M(t^3)$ , ... sont identiques à  $M(t)$  et, par conséquent, les nombres  $j(t^2)$ ,  $j(t^3)$ , ... sont égaux à  $j(t)$ . Donc *les classes de points invariants d'indice non-positif ont un caractère stable* relatif à l'itération de la transformation  $\tau\varphi$ . Au contraire, *les classes d'indice positif ont un caractère instable*. Pour une telle classe la transformation  $tE$  est sans point invariant. On montre, par une application répétée de l'équation fonctionnelle, que les transformations  $t^2E$ ,  $t^3E$ , ... finissent par avoir des points invariants. Il y a donc un certain exposant minimum caractéristique  $n$  tel que  $t^n$  a des points



Grâce à l'équation fonctionnelle on voit que cette totalité forme un groupe  $T$ , ayant le groupe  $F$  comme sous-groupe invariant. Cela est vrai, qu'on regarde  $T$  comme un groupe de transformations soit de  $\Phi + E$ , soit de  $E$  seul. Dans le dernier cas *le groupe  $T$  est un invariant de la classe de transformations de  $\varphi$* ; on a donc la chance de dériver de la structure de ce groupe  $T$  des nombres qui ont une signification invariante pour la classe de  $\tau$ . La distinction mentionnée importe pour la détermination du groupe complémentaire  $T/F$  de  $F$  par rapport à  $T$ . Dans le cas considéré par nous où l'on prend  $T$  comme un groupe de transformations de  $E$  seul, le groupe  $T/F$  est d'ordre infini, si la transformation identique de  $E$  n'est représentée dans le tableau ci-dessus que par l'élément désigné par 1. Si au contraire on retrouve la transformation identique de  $E$  la première fois parmi une des fonctions  $t^n, f_1 t^n, f_2 t^n, \dots$ , le groupe  $T/F$  est cyclique d'ordre  $n$ . Dans ce cas nous dirons que la classe de  $\tau$  est une *classe d'ordre  $n$  de transformations*; cela veut dire que  $\tau^n$  appartient à la classe de l'identité.

16. — Regardons de près une classe d'ordre fini, soit  $n$ . La transformation  $t^n$  est (sur  $E$ ) un élément de  $F$ . Deux cas sont à distinguer:

1° Si  $t^n = f \neq 1$ , l'élément  $f$  est un élément invariant par l'automorphisme  $J$  correspondant à  $t$ . Donc  $M(t)$  n'est pas vide, et on a  $M(t) = M(t^n)$ . Mais  $t^n$ , étant sur  $E$  la substitution hyperbolique  $f$ , n'a sur  $E$  comme points invariants que les points fondamentaux de  $f$ . Il en est donc de même pour  $t$ , et l'on a  $\nu = 1, \mu = 0$ , donc  $j = 0$ .

2° Si  $t^n = 1$ , on doit avoir  $M(t)$  vide, donc  $\nu = \mu = 0$  et  $j = 1$ .

On voit que, pour les classes d'ordre fini de transformations, il n'y a pas d'autres classes essentielles de points invariants que les classes de l'indice positif  $j = 1$ . On a donc  $\Xi = Z$  et cela nous donne une idée de la portée des moyens algébriques dans ce cas.

Une classe de points invariants d'indice positif de  $\tau$  reste une classe d'indice positif pour  $\tau^2, \tau^3, \dots, \tau^{n-1}$ , puisque  $t^2 E, t^3 E, \dots, t^{n-1} E$  restent sans points invariants. Outre ces classes, pour

un diviseur  $m$  de  $n$  on peut avoir une classe d'indice positif pour les transformations  $\tau^m, \tau^{2m}, \dots, \tau^{\left(\frac{n}{m}-1\right)m}$ . Mais les points invariants de  $\tau^m\varphi$ , formant une telle classe, sont transformés par  $\tau, \tau^2, \dots, \tau^{m-1}$  en d'autres classes de  $\tau^m$ , de sorte que les classes de  $\tau^m$  qui ne sont pas issues des puissances inférieures, se répartissent sur des systèmes de  $m$  classes conjuguées, dont les points forment des ensembles homéomorphes échangés par  $\tau, \tau^2, \dots, \tau^{m-1}$ . Soit  $A_m$  le nombre des systèmes de telles classes, conjuguées  $m$  à  $m$ , de  $\tau^m$  pour tout diviseur  $m$  de  $n$ , y compris le cas  $m = 1$ .

17. — Calculons la somme des valeurs de  $\Xi$  pour  $\tau, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$  en appliquant la formule de M. ALEXANDER.  $s(\Gamma)$  est la somme des racines du *polynôme caractéristique*

$$|\Gamma - \lambda E_{2p}| = \lambda^{2p} + \dots + |\Gamma| = \gamma(\lambda),$$

$E_{2p}$  désignant la matrice unité. Soit  $\varepsilon$  la multiplicité de la racine  $+1$ .  $\varepsilon$  est un nombre pair. La matrice  $\Gamma$  correspondant à  $\tau$ , la matrice  $\Gamma^r$  correspond à  $\tau^r$ , et on a  $\Gamma^n = E_{2p}$ . On trouve donc  $s(\Gamma^r)$  égale à la somme des puissances d'ordre  $r$  des racines de  $\gamma(\lambda)$ . Des calculs bien connus donnent alors

$$\begin{aligned} \Xi(\tau) + \Xi(\tau^2) + \dots + \Xi(\tau^{n-1}) &= \sum_{m|n} A_m m \left(\frac{n}{m} - 1\right) = \\ &= 2p - 2 - n(\varepsilon - 2). \end{aligned}$$

Si aucune des transformations  $\tau, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}$  n'a des classes essentielles de points invariants, tous les  $\Xi$  ou tous les  $A_m$  s'annulent; dans ce cas  $p - 1$  est divisible par  $\frac{\varepsilon}{2} - 1$ , le quotient étant  $n$ .

On se procure un exemple d'une classe d'ordre fini  $n$  de transformations en partant d'une transformation  $\tau\varphi$  d'ordre fini  $n$ , c'est-à-dire telle que  $\tau^n\varphi$  soit la transformation identique de la surface  $\varphi$ . Ce cas des transformations périodiques a été étudié par M. BROUWER<sup>1</sup>, qui a montré par sa notion de surface modulaire qu'on peut réaliser une telle transformation d'ordre fini  $n$  par

<sup>1</sup> L. E. J. BROUWER, Ueber topologische Involutionen. *Amsterdam Proceedings*, vol. XXI.

la permutation cyclique des  $n$  feuillets d'une surface de Riemann régulière de genre  $p$  étendue sur une autre surface homéomorphe à la surface modulaire. Dans ce cas la formule ci-dessus est la formule de HURWITZ<sup>1</sup>, les nombres  $\frac{n}{m} - 1$  désignant l'ordre de ramification des divers points invariants par les puissances de  $\tau$  et  $\varepsilon$  étant le double du genre de la surface modulaire.

Cela étant, la question s'impose, si une classe d'ordre  $n$  de transformations contient toujours une transformation d'ordre  $n$ . Si la réponse est affirmative — ce que je n'ai pu démontrer que dans plusieurs cas spéciaux — cela expliquerait la grande portée des méthodes algébriques pour le cas des classes d'ordre fini de transformations. Quelle que soit la réponse à cette question, on a obtenu une généralisation topologique de la formule de Hurwitz par des méthodes de la Théorie des groupes et on en peut déduire des conclusions pour les classes d'ordre fini comme celle-ci:

Dans le cas où  $n$  est un nombre premier, on trouve les bornes supérieures  $n \leq 2p + 1$  et  $Z \leq 2 + \frac{2p}{n-1}$  et la congruence  $Z \equiv 2 - 2p \pmod{n}$ ; pour  $n = 2$  on a même  $Z \equiv 2 - 2p \pmod{4}$ .

18. — Dans la recherche d'une transformation périodique dans une classe donnée d'ordre  $n$ , la théorie abstraite des groupes discontinus intervient d'une manière remarquable. Partons du fait qu'on connaît une représentation abstraite du groupe  $T$  en prenant comme générateurs de  $T$  un système  $a_1, a_2, \dots$  de générateurs de  $F$  et l'opération  $t$ , et en écrivant un système complet de relations de  $T$  composé

- 1° Des relations entre  $a_1, a_2, \dots$  définissant  $F$ ,
- 2° De la relation  $t^n = f$  (élément de  $F$ ),
- 3° Des relations  $ta_\alpha t^{-1} = a_{\alpha J}$ , qui expriment l'automorphisme  $J$  correspondant à  $t$ .

Dans des cas convenables on peut modifier cette forme abstraite du groupe  $T$  de sorte qu'on puisse construire d'après un

<sup>1</sup> A. HURWITZ, Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich. *Math. Ann.*, t. 41, p. 404.

procédé de M. DEHN un graphe régulier dans le plan hyperbolique représentant  $T$  (« Gruppenbild » au sens de M. DEHN<sup>1</sup>). Le groupe de transformations de ce graphe en lui-même est alors un groupe  $T$  de substitutions homographiques de  $x$  dans  $\Phi + E$  ayant  $F$  comme sous-groupe invariant, ce qui donne immédiatement la surface de Riemann correspondant à la classe donnée d'ordre  $n$ .

19. — Reprenons le cas d'une classe  $\tau\varphi$  d'ordre infini. Soit  $t$  une transformation de  $\Phi$  ayant l'indice  $j = 1$ , et  $n$  l'exposant caractéristique. Supposons que le groupe  $H (t^n)$  ait un nombre  $\nu \geq 1$  de générateurs libres. A  $t$  correspond non seulement un automorphisme  $J$  de  $F$ , mais aussi un automorphisme  $J_H$  de  $H$ . On peut donc former un groupe  $T_H$  en ajoutant le générateur  $t$  à  $H$ ; alors le groupe complémentaire  $T_H/H$  sera d'ordre fini  $n$ . Les résultats trouvés dans le cas où  $T/H$  est d'ordre fini, ont donc leur analogue. De cette manière on pourra se servir des méthodes algébriques aussi dans le cas général.

Pour donner à ces considérations un aspect géométrique, on peut imaginer une transformation  $\tau\delta$  du domaine central  $\delta$  correspondant à  $t^n$ , telle que  $\tau\delta$  fasse partie d'une transformation  $\tau\varphi$  de la classe en question et que  $\tau^n\delta$  appartienne à la classe identique de  $\delta$  ou soit même la transformation identique de  $\delta$ . La transformation effectuée sur l'ensemble  $S$  limitant  $\Delta$  sur  $E$  par  $tE, t^2E, \dots, t^nE$  est compatible avec une telle transformation de  $\Delta$ . Un contour de  $\delta$  transformé par  $\tau\delta$  en un autre contour joue le rôle d'un point non-invariant. Au contraire, un contour de  $\delta$  transformé en soi-même, c'est-à-dire un côté de  $\Delta$  transformé par  $t\Delta$  en un côté équivalent, joue le rôle d'un point invariant. On a donc une situation analogue à une classe d'ordre fini de transformations d'une surface fermée. Ainsi on peut appliquer les résultats concernant les valeurs possibles de  $n$  et les nombres de classes de points invariants.

La classe d'indice  $j = 1$  représentée par  $t$  est associée au domaine central  $\delta$  de  $t^n$ . On obtient par les relations algébriques exposées plus haut *une borne supérieure pour le nombre de classes*

<sup>1</sup> M. DEHN, Ueber die Topologie des dreidimensionalen Raumes. *Math. Ann.*, vol. 69.

d'indice 1 associées au même domaine  $\delta$  (ou au même domaine principal  $\omega$ , ce qui revient au même; dans le cas  $H(t^n) = 1$  il n'y a qu'une seule classe associée à  $\omega$ ). Cette borne ne dépend que du genre  $g$  de  $\delta$  et du nombre  $r$  de ses contours. Pour tous les domaines  $\omega$  ayant une aire positive, on obtient ainsi une borne supérieure pour le nombre total de classes d'indice 1 associées à tous ces domaines  $\omega$ . D'autre part, on construit sans difficulté des transformations  $\tau\phi$  ayant pour  $\Xi$  une valeur positive aussi grande qu'on veut. Donc, dans un tel cas, presque toutes les classes d'indice 1 doivent être associées à des domaines  $\omega$  d'aire nulle (dont le nombre n'est pas borné) c'est-à-dire répondant au cas  $\nu = 0$ ,  $\mu = 2$ , donc  $n = 2$ . (Voir la figure 7). Toutes ces classes ont donc le *maximum d'instabilité*, puisqu'elles s'évanouissent déjà pour le carré de  $\tau\phi$ .

20. — Pour terminer, je voudrais attirer l'attention sur le problème général de la topologie des transformations des surfaces énoncé dans le n° 1: Trouver un système *complet* d'invariants pour les classes de transformations topologiques. La lettre  $\tau$  désignant à présent les *classes* de transformations, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait une équivalence topologique

$$\tau_1 = \tau_3 \tau_2 \tau_3^{-1}$$

serait que  $\tau_1$  et  $\tau_2$  soient d'accord quant à ce système d'invariants. Dans bien des cas de classes d'ordre fini de transformations on trouve que le polynôme  $\gamma(\lambda)$  du n° 17 forme, lui seul, un tel invariant. Par exemple, toutes les classes d'ordre 2 d'une surface fermée de genre  $p$  correspondant au polynôme  $\gamma(\lambda) = (\lambda + 1)^{2p}$  sont équivalentes.

On peut caractériser un autre cas, dans lequel le problème se trouve résolu, de la manière suivante: Soit  $\tau$  une classe d'ordre infini telle que pour toute transformation  $t(\Phi + E)$  correspondant à  $\tau$  le domaine principal  $\Omega$  soit identique au domaine central  $\Delta$  de sorte qu'on ait  $\mu = 0$  quand on a  $\nu > 0$ ; et que les domaines  $\delta$  sur  $\phi$  remplissent la surface entière. Soit  $g$  une géodésique fermée limitant sur  $\phi$  le domaine  $\delta_1$  d'un côté et le domaine  $\delta_2$  de l'autre. Soit  $t$  une transformation de  $\Phi + E$

ayant le domaine central  $\Delta_1$  correspondant à  $\delta_1$  et  $G$  un côté de  $\Delta_1$  correspondant à  $g$ . Soit  $h$  la plus courte translation dans  $F$  ayant  $G$  comme axe. Il y a alors un entier  $m$ , et un seul, tel que  $h^m t$  ait un domaine central  $\Delta_2$  correspondant à  $\delta_2$  et ayant  $G$  comme un de ses côtés. Au système fini  $g_1, g_2, \dots, g_\rho$  des géodésiques sur  $\varphi$  formant les contours de tous les  $\delta$  se trouve donc associé un système  $m_1, m_2, \dots, m_\rho$  de nombres entiers. Soit maintenant  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  deux surfaces fermées du même genre  $p$  (qui peuvent se confondre) et  $\tau_1$  et  $\tau_2$  deux classes de transformations du type caractérisé tout à l'heure. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait une représentation  $\tau$  de  $\varphi_1$  sur  $\varphi_2$ , telle que  $\tau_2 = \tau \tau_1 \tau^{-1}$ , est que la configuration des  $g$  sur  $\varphi_2$  soit homéomorphe à la configuration des  $g$  sur  $\varphi_1$  et que le nombre  $m$  soit le même pour chaque paire de deux géodésiques correspondantes.

---

## BIBLIOGRAPHIE

---

Emile MEYERSON. — **Essais.** Préface de Louis de Broglie. Avertissement de Lucien Lévy-Bruhl. — Un volume in-8° de xvi-273 pages. Prix: 32 francs. Joseph Vrin, Paris, 1936.

Ces *Essais* s'offrent comme un assemblage posthume de publications qui restèrent séparées du vivant de M. Emile Meyerson. Combien il est heureux et remarquable de les avoir maintenant réunies en un seul livre. La Préface de M. Louis de Broglie reproduit celle déjà écrite pour le fascicule 68 des *Actualités*, fascicule intitulé *Réel et Déterminisme dans la Physique quantique* (voir *L'Ens. math.*, **32**, 1933, p. 106). Rappelons, à ce propos, la belle assertion de M. Paul Valéry: L'esprit humain est absurde parce qu'il cherche; il est grand par ce qu'il trouve. Et M. Louis de Broglie fait bien ressortir, en effet, que, si nos tentatives d'explication pouvaient complètement réussir, c'est que l'Univers s'accommoderait d'un anthropomorphisme justement impropre à soutenir les prétentions de plus en plus élevées et sans cesse renaissantes de la Pensée humaine. Ne nous plaignons donc pas de constater que la Nature n'a pas notre rationalisme.

Voici les titres des publications assemblées:

1. Le sens commun vise-t-il la connaissance ?
2. Le sens commun et la quantité.
3. Hegel, Hamilton, Hamelin et le concept de cause.