

<b>Zeitschrift:</b>	L'Enseignement Mathématique
<b>Herausgeber:</b>	Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
<b>Band:</b>	35 (1936)
<b>Heft:</b>	1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE
 <b>Artikel:</b>	INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SÉRIES D'ÉQUIVALENCE SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE
<b>Autor:</b>	Togliatti, E. G.
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-27316">https://doi.org/10.5169/seals-27316</a>

#### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 18.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SÉRIES D'ÉQUIVALENCE SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE<sup>1</sup>

PAR

E. G. TOGLIATTI (Gênes).

1. — La Géométrie algébrique, c'est-à-dire la Géométrie des variétés algébriques au point de vue des transformations birationnelles des variétés mêmes, s'est enrichie récemment d'un nouveau chapitre dont l'importance est bien remarquable. Il s'agit d'une manière nouvelle de construire sur les surfaces algébriques (et, plus généralement, sur les variétés algébriques à plus de deux dimensions) une théorie analogue à celle des séries linéaires de groupes de points sur les courbes algébriques: la théorie des séries d'équivalence de groupes de points.

Le premier travail dans cet ordre d'idées est un Mémoire de M. F. SEVERI, publié en 1932 dans les *Comm. Math. Helv.* à l'occasion du dernier Congrès international des Mathématiciens; l'école géométrique italienne, et surtout M. Severi, ont ensuite développé la nouvelle théorie, dont l'intérêt ne fait qu'augmenter, soit à cause des résultats qu'on en a déjà tirés dans le domaine de la géométrie, soit à cause des points de contact, nombreux et suggestifs, qu'elle présente avec d'autres théories de la géométrie et de l'analyse. Dans cette introduction je me propose de vous présenter, le plus rapidement possible, la définition géométrique des séries d'équivalence sur une surface algébrique, et de vous exposer quelques-unes des liaisons entre la théorie dont il est question et la Topologie des surfaces algébriques, en laissant toujours de côté les détails des démonstrations.

---

<sup>1</sup> Conférence faite le 22 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

2. — Soit  $C$  une courbe algébrique irréductible dans un espace linéaire  $S_r$  à  $r$  dimensions ( $r \geq 2$ ); nous indiquerons par  $x_0 x_1 \dots x_r$  les coordonnées homogènes d'un point dans cet espace. On appelle *série linéaire* sur  $C$  l'ensemble des groupes de points qui sont découpés sur  $C$  par les hypersurfaces d'un système linéaire:

$$\lambda_0 f_0(x_i) + \lambda_1 f_1(x_i) + \dots + \lambda_s f_s(x_i) = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, r) ; \quad (1)$$

on peut dire aussi: l'ensemble des groupes de niveau constant d'une fonction rationnelle sur la courbe  $C$ :

$$\varphi(x_i) = \lambda_1 \frac{f_1(x_i)}{f_0(x_i)} + \dots + \lambda_s \frac{f_s(x_i)}{f_0(x_i)} \quad (i = 0, 1, \dots, r) . \quad (2)$$

Si l'on prend une surface algébrique  $F$  au lieu d'une courbe  $C$ , on voit aussitôt deux généralisations possibles de cette notion. Avant tout, on peut considérer sur  $F$ , que nous supposerons encore appartenant à  $S_r$  ( $r \geq 3$ ), les courbes d'intersection avec les hypersurfaces d'un système linéaire (1), c'est-à-dire les courbes de niveau constant d'une fonction rationnelle  $\varphi$  sur  $F$ ; elles forment un *système linéaire de courbes* sur  $F$ . Ou bien l'on peut, soit prendre les points d'intersection de  $F$  avec des variétés algébriques  $V_{r-2}$  à  $r - 2$  dimensions (donc avec des courbes, en général gauches, lorsque  $F$  est une surface de l'espace ordinaire à trois dimensions), soit considérer en même temps sur  $F$  deux fonctions rationnelles indépendantes  $\varphi, \psi$  avec leurs groupes de niveaux constants simultanés; tant par l'une que par l'autre de ces deux constructions, on obtient sur  $F$  des ensembles de groupes de points, dont nous allons préciser la définition, qui sont analogues aux séries linéaires sur une courbe, et qui ont reçu le nom de *séries d'équivalence* de groupes de points sur  $F$ . Systèmes linéaires de courbes et séries d'équivalence de groupes de points sont sans doute deux idées bien différentes, car elles sont liées respectivement à une seule ou bien à deux fonctions rationnelles sur  $F$ . En passant des courbes aux surfaces elles se présentent l'une et l'autre assez naturellement; mais tandis que la première, la théorie des systèmes linéaires de courbes, est depuis longtemps une théorie organique, moyen puissant de recherche dans la

géométrie des variétés algébriques à deux dimensions, la deuxième, qui se présente du premier abord comme bien plus difficile, a été étudiée seulement dans ces dernières années.

La définition même d'une série d'équivalence de groupes de points sur une surface n'est pas immédiate à énoncer. Elle a traversé, dès le commencement de la théorie, plusieurs modifications dont il ne peut pas être question ici; et cela est assez naturel: les développements ultérieurs possibles de la théorie étant imprévisibles, on ne pouvait choisir *a priori* avec certitude, parmi les propriétés caractéristiques des séries linéaires sur une courbe, la plus convenable à imiter. La définition que je vais exposer, et qui semble désormais définitive, est la plus commode pour organiser d'une façon simple la théorie; elle est intrinsèque à la surface que l'on considère, et rend en même temps évident que ce que l'on définit est invariant par rapport aux transformations birationnelles de la surface. On commence par définir certaines *séries élémentaires*, à partir desquelles on obtient les séries les plus générales à l'aide des opérations de somme et de différence; de la manière suivante.

On appelle *série d'équivalence élémentaire sur F* l'ensemble des groupes de niveaux constants simultanés de deux fonctions rationnelles indépendantes  $\varphi$ ,  $\psi$ , à considérer sur  $F$ . Ces groupes de points sont les intersections d'une courbe de niveau de  $\varphi$  et d'une courbe de niveau de  $\psi$ , de toutes les manières possibles; et puisque les courbes de niveau constant de  $\varphi$ ,  $\psi$  forment deux systèmes linéaires  $|C_1|$  et  $|C_2|$ , on peut dire aussi, d'une façon plus géométrique, mais encore intrinsèque et invariante, qu'*une série élémentaire se compose des groupes des points d'intersection de deux courbes qui varient sur F appartenant à deux systèmes linéaires donnés*; d'où le nom de *séries d'intersection complète* qu'on avait donné aussi aux séries élémentaires.

Si les deux systèmes linéaires  $|C_1|$  et  $|C_2|$  ont des points-base en commun, ceux-ci appartiennent à tous les groupes de la série élémentaire; on peut les négliger.

On peut faire rentrer dans la définition qui vient d'être donnée les cas particuliers suivants. Si  $|C_1|$  et  $|C_2|$  se réduisent à deux courbes fixes  $C_1$  et  $C_2$ , la série élémentaire se compose d'un seul groupe de points fixes de  $F$ . Si  $|C_1|$  se réduit à une courbe

fixe  $C_1$ , tous les groupes de la série appartiennent à  $C_1$ ; la série s'appelle alors une *série d'équivalence curviligne*, en opposition aux *séries superficielles* dont les groupes recouvrent  $F$  toute entière; on dit aussi que les groupes de la série sont *semifixes* sur  $C_1$ ; si  $C_1$  est irréductible, la série considérée est une série linéaire, découpée sur  $C_1$  par le système  $|C_2|$ ; et toute série linéaire sur une  $C_1$  irréductible est une série élémentaire particulière sur  $F$ . Enfin, si toutes les courbes de  $|C_1|$ , par exemple, contiennent une composante fixe  $\gamma_1$ , *irréductible* ou *non*, les groupes de la série élémentaire contiennent tous un certain nombre de points semifixes sur  $\gamma_1$ .

3. — Ces dernières remarques montrent la nécessité de construire une théorie des séries de groupes de points sur les courbes algébriques *réductibles* avant de commencer une théorie quelconque des séries d'équivalence sur une surface; en effet, comme un groupe de points qui varie sur une courbe peut contenir des points fixes, il est bien évident, même *a priori*, qu'un groupe de points variables sur une surface peut contenir soit des points fixes soit des points qui peuvent varier seulement sur une courbe. Cette théorie, tentée par M. NOETHER en 1886, a été développée par M. SEVERI en 1932. Il a défini une série d'équivalence sur une courbe réductible  $C$  comme l'ensemble des groupes des points qui sont découpés sur  $C$  par les hypersurfaces d'un système linéaire; et parmi les choses fondamentales il a trouvé qu'une telle série peut être découpée sur  $C$  par un système linéaire d'hypersurfaces dont les éléments correspondent birationnellement aux groupes de la série; et qu'une série d'équivalence complète sur une courbe composée  $C_1 + C_2 + \dots + C_h$  s'obtient toujours en prenant des séries linéaires complètes  $g_{n_1}, g_{n_2}, \dots$  sur les courbes composantes (ou sur quelques-unes seulement de ces courbes), et en réunissant, de toutes les manières possibles, un groupe de  $g_{n_1}$  avec un groupe de  $g_{n_2}$ , etc.

On comprend aussi qu'en passant des courbes irréductibles aux courbes réductibles et aux surfaces, on doit abandonner le nom de série *linéaire*, car les groupes, par exemple, d'une série complète sur une courbe réductible ne peuvent plus être mis en correspondance birationnelle *sans aucune exception* avec les

points d'un espace linéaire, comme dans le cas d'une courbe irréductible.

Mais il faut ajouter que les groupes d'une série élémentaire  $\sigma$ , qui ne se compose pas d'un seul groupe de points fixes, forment toujours une variété rationnelle. En effet, si  $\sigma$  n'est pas une série curviligne, il y a une correspondance birationnelle entre les groupes de  $\sigma$  et les couples d'éléments de deux variétés linéaires  $|C_1|$  et  $|C_2|$ ; tandis que, lorsque  $\sigma$  est une série curviligne, ses groupes correspondent birationnellement, nous l'avons dit tout à l'heure, aux courbes d'un système linéaire convenable.

4. — Si l'on dispose d'un modèle projectif de  $F$  dans l'espace ordinaire, on peut donner pour une série élémentaire la construction suivante. Les deux systèmes linéaires  $|C_1|$  et  $|C_2|$  qui définissent la série sont découpés sur  $F$ , en excluant certaines courbes fixes éventuelles, par deux systèmes linéaires de surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ ; l'intersection d'une surface de  $\Sigma_1$  avec une surface de  $\Sigma_2$  est alors une courbe, en général gauche, qui varie dans un système continu  $S$  de courbes, et qui rencontre  $F$  en les points d'un groupe de la série donnée (et peut-être encore dans des points fixes que l'on peut négliger). La construction s'applique encore dans tous les cas particuliers que la série peut présenter; si  $\Sigma_1$ , par exemple, admet une courbe-base appartenant à  $F$ , tous les groupes de la série contiennent une partie semifixe.

5. — Soient maintenant  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  deux séries élémentaires; on peut alors parler de la série *somme*  $\sigma_1 + \sigma_2$ . Si  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  sont découpées sur  $F$  par des systèmes continus  $S_1$  et  $S_2$  de courbes, la série  $\sigma_1 + \sigma_2$  sera découpée sur  $F$  par le système  $S_1 + S_2$ .

S'il y a dans  $\sigma_1$  des groupes chacun contenant un groupe de  $\sigma_2$ , les groupes résidus forment une série  $\sigma$  qu'on appelle la *différence*  $\sigma_1 - \sigma_2$ . La série ainsi obtenue peut être découpée sur  $F$  elle aussi à l'aide de courbes convenables<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> En effet, soient  $S_1$ ,  $S_2$  les deux systèmes de courbes qui découpent sur  $F$  les séries données  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , en dehors de certains groupes de points fixes  $A_1$ ,  $A_2$ ; et soit  $G$  un groupe variable de  $\sigma_1 - \sigma_2$ . Il y aura alors une courbe  $C_1$  de  $S_1$  qui découpe sur  $F$  les points de  $G$ , ceux de  $A_1$  et ceux d'un groupe  $G_2$  de  $\sigma_2$ ; et il y aura aussi une courbe  $C_2$  de  $S_2$

Si, par exemple,  $\sigma_1$  est une série élémentaire dont les groupes contiennent une partie semifixe qui varie dans une série élémentaire (curviligne)  $\sigma_2$ , alors  $\sigma_1 - \sigma_2$  s'obtient de  $\sigma_1$  en négligeant dans tous ses groupes la partie semifixe; on l'appelle une *série d'intersection partielle*.

De tout ce qui précède on déduit que, lorsqu'on connaît sur  $F$  des séries élémentaires  $\sigma_1 \sigma_2 \dots, \sigma'_1 \sigma'_2 \dots$ , on peut considérer aussi une série du type  $\Sigma \sigma_i - \Sigma \sigma'_i$ , pourvu qu'il existe des groupes de  $\Sigma \sigma_i$  qui contiennent chacun un groupe de  $\Sigma \sigma'_i$ . Voilà les séries d'équivalence les plus générales: *Une série d'équivalence sur une surface algébrique  $F$  est donc un ensemble de groupes de points qu'on peut obtenir à l'aide des opérations de somme et de différence en partant d'un nombre fini de séries élémentaires.*

6. — On peut démontrer encore que tout système continu  $S$  de courbes découpe sur  $F$  une série d'équivalence, même lorsque la courbe générale  $C$  de  $S$  n'est pas l'intersection complète de deux surfaces comme au n° 4. La démonstration, bien simple, s'appuie sur la représentation monoïdale des courbes gauches et de la manière suivante. La courbe  $C$  est l'intersection partielle du cône, qu'on obtient en la projetant d'un point  $O$  de l'espace, avec une surface monoïdale  $\Sigma_1$  bien déterminée, de sommet  $O$ , dont l'ordre ne change pas lorsque  $C$  décrit  $S$ . La partie restante de l'intersection  $(\Sigma \Sigma_1)$  est à son tour l'intersection complète du même cône  $\Sigma$  avec une surface convenable  $\Sigma_2$ . La série découpée sur  $F$  par les courbes  $C$  de  $S$  est donc la différence des deux séries découpées sur  $F$  par les deux courbes variables d'intersection complète  $(\Sigma \Sigma_1)$  et  $(\Sigma \Sigma_2)$ .

Toutes ces constructions peuvent s'étendre sans aucune difficulté aux surfaces d'un espace  $S_r$  à  $r > 3$  dimensions; on parlera alors de variétés  $V_{r-2}$  à  $r - 2$  dimensions au lieu de parler de courbes de  $S_3$ . En conclusion: *Les séries d'équivalence*

découpant  $F$  en  $G_2$  et  $A_2$ ; c'est-à-dire:

$$(C_1, F) = G + A_1 + G_2, \quad (C_2, F) = G_2 + A_2;$$

on en déduit:

$$(C_1 - C_2, F) = G + (A_1 - A_2).$$

Donc  $G$  est découpé sur  $F$  par la courbe  $C_1 - C_2$ , en dehors du groupe fixe  $A_1 - A_2$ . Il est bien possible que tout cela doive être entendu au sens *virtuel*, comme il arrive bien souvent dans la théorie des opérations sur les séries et les systèmes linéaires.

*sur une surface F peuvent s'obtenir en découpant F par les  $V_{r-2}$  d'une famille continue, ou bien comme différence de deux séries ainsi construites.*

Un résultat annoncé très récemment par M. SEVERI a précisé davantage la construction d'une série d'équivalence, dans le sens que les groupes d'une telle série sont toujours les intersections de F avec une  $V_{r-2}$ , variable d'une manière continue, en dehors, peut-être, d'un groupe de points fixes et d'un groupe semifixe sur une courbe irréductible de F.

La définition et la construction des séries d'équivalence sur une surface deviennent ainsi complètes et parfaites.

7. — Laissons de côté maintenant l'aspect algébriko-géométrique de la théorie pour traiter des liaisons entre les séries d'équivalence que nous venons de définir et les propriétés topologiques de la surface F. Le problème fondamental qui se présente ici est de caractériser une série d'équivalence  $\sigma$  donnée sur F au moyen de propriétés topologiques; à cet effet il faut considérer sur la Riemannienne, à quatre dimensions, de F les cycles formés par des groupes de  $\sigma$ , c'est-à-dire les cycles qu'on peut obtenir en faisant varier sur F un groupe de  $\sigma$ . On voit mieux la chose au travers d'une variété V qui représente birationnellement les groupes de  $\sigma$ ; V aura la même dimension (complexe) r de  $\sigma$ ; on peut l'obtenir bien simplement comme une variété contenue dans une image birationnelle de tous les groupes de n points de F. On aura alors entre V<sub>r</sub> et F une certaine correspondance algébrique, par laquelle à tout point P' de V<sub>r</sub> correspondent sur F les n points P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, ..., P<sub>n</sub> d'un groupe de  $\sigma$ , tandis qu'à un point P de F correspondent sur V<sub>r</sub> tous les points P' qui sont les images des groupes de  $\sigma$  contenant P. Lorsque P' décrit sur V<sub>r</sub> un cycle  $\Delta'$ , on peut démontrer que les points correspondants sur F décriront eux aussi un cycle  $\Delta$ , ayant la même dimension que  $\Delta'$ . On peut se borner aux cycles à une ou à deux dimensions, soit à cause de la dualité topologique qui fait correspondre les cycles à une et ceux à trois dimensions sur la Riemannienne de F, soit parce qu'un cycle  $\Delta'$  de dimension plus grande que trois donne lieu sur F à des cycles sans intérêt<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> L'affirmation précédente est facile à établir. Lorsque  $\Delta'$  est un cycle linéaire,  $\Delta$  aussi est évidemment un cycle linéaire. Supposons alors que  $\Delta'$  soit un cycle à deux

On voit aussi tout de suite que si  $\Delta'$  est nul,  $\Delta$  aussi est nul; et que, à cause du caractère algébrique de la correspondance entre  $V_r$  et  $F$ , si  $\Delta'$  est algébrique  $\Delta$  l'est aussi.

Choisissons alors sur  $F$  une base pour les cycles à une et à deux dimensions; la première se compose de  $2q$  cycles  $\Gamma_1^1, \Gamma_1^2, \dots, \Gamma_1^{2q}$ , où  $q = p_g - p_a$  est l'irrégularité de  $F$ ; la deuxième comprend, en général,  $\rho$  cycles algébriques non nuls  $\Gamma_2^1, \Gamma_2^2, \dots, \Gamma_2^\rho$ ,  $\rho_0$  cycles qui ne sont pas algébriques et qui sont homologiquement indépendants des cycles algébriques  $\Gamma_2^{\rho+1}, \Gamma_2^{\rho+2}, \dots, \Gamma_2^{\rho+\tau}$  et enfin  $\tau - 1$  cycles diviseurs de zéro  $\Gamma_2^{\rho+\rho_0+1}, \dots, \Gamma_2^{\rho+\rho_0+\tau-1}$ ; on sait que  $\rho$  est le nombre-base de MM. PICARD et SEVERI pour la totalité des courbes algébriques existant sur  $F$ ,  $\rho_0$  est le nombre des intégrales doubles de la deuxième espèce appartenant à  $F$ ; au point de vue topologique  $\rho + \rho_0$  est l'ordre de connexion superficielle de  $F$ , tandis que  $\sigma$  est lié à la torsion superficielle de  $F$ .

Soient encore  $\Delta_1^h$  et  $\Delta_2^k$  deux bases pour les cycles à une et à deux dimensions de  $V_r$ .

Si  $\Delta_1^h$  et  $\Delta_2^k$  sont les cycles de  $F$  qui correspondent à  $\Delta_1^h$  et à  $\Delta_2^k$ , on pourra écrire les relations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1^h \sim \sum_{i=1}^{2q} \lambda_{hi} \Gamma_1^i ; \\ \Delta_2^k \sim \sum_{i=1}^{\rho} \mu_{ki} \Gamma_2^i + \sum_{i=1}^{\rho_0} \bar{\mu}_{ki} \Gamma_2^{\rho+i} + \sum_{i=1}^{\tau-1} \nu_{ki} \Gamma_2^{\rho+\rho_0+i} . \end{array} \right. \quad (3)$$

On pourrait écrire ces formules pour toute série algébrique de groupes de points sur  $F$ ; mais dans notre cas il s'agit d'une série

---

dimensions. La variété  $V_r$  contient une variété dirimante  $\Phi$ , qui est lieu des points de  $V_r$  qui représentent les groupes de  $n$  points de  $\sigma$  contenant des points confondus; si l'on suppose qu'un groupe de  $\sigma$  se compose en général de  $n$  points différents, la variété  $\Phi$  aura au plus  $2r - 2$  dimensions réelles; et le cycle  $\Delta'$ , ou bien un cycle homologue très voisin, aura un nombre fini de points communs avec  $\Phi$ ; entourons tous ces points de  $\Delta'$  par des petites cellules à deux dimensions qui les contiennent à leur intérieur;  $\Delta'$  deviendra une surface ouverte  $\Delta'_0$ , qu'on peut recouvrir par un complexe  $k'$ ; à chaque cellule à deux dimensions de  $k'$  correspondent, sur  $F$ ,  $n$  cellules analogues toutes différentes et qui ne présentent pas de points communs; à  $k'$  correspond donc un complexe  $k$  à deux dimensions qui recouvre la surface  $\Delta_0$  correspondante à  $\Delta'_0$ ; au contour de  $k'$  correspond le contour de  $k$ ; en passant à la limite, lorsque  $\Delta'_0$  tend vers  $\Delta'$ ,  $\Delta_0$  se fermera en même temps que  $\Delta'_0$  et tendra vers  $\Delta$  qui sera donc un cycle à deux dimensions. Selon donc que  $\Delta'$  est linéaire ou à deux dimensions,  $\Delta$  est aussi linéaire ou à deux dimensions.

d'équivalence. Quelles particularités présentent alors les coefficients  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\bar{\mu}$ ,  $\nu$ ? On comprend bien, en effet, que ces coefficients doivent jouer un rôle très important dans notre théorie.

Supposons en premier lieu que  $\sigma$  soit une série élémentaire, qui ne se réduise pas à un seul groupe de points fixes.  $V_r$  est dans ce cas une variété rationnelle. On en déduit que tout cycle linéaire  $\Delta'$  de  $V_r$  est nul; le cycle correspondant  $\Delta$  sur  $F$  sera nul aussi, et les coefficients  $\lambda$  seront tous nuls. Tout cycle à deux dimensions de  $V_r$  peut être transporté sur une surface rationnelle contenue dans  $V_r$ ; il est donc algébrique et il n'est pas un diviseur de zéro; le cycle correspondant sur  $F$  aura les mêmes propriétés; donc tous les coefficients  $\bar{\mu}$  et  $\nu$  seront nuls.

A ce point il convient de donner quelques définitions. On dira qu'une série algébrique de groupes de points sur  $F$  est:

a) à circulation linéaire nulle, lorsque les coefficients  $\lambda$  des formules (3) sont tous nuls, c'est-à-dire lorsque à tout cycle linéaire de l'image  $V_r$  de la série correspond sur  $F$  un cycle linéaire nul;

b) à circulation superficielle algébrique, lorsque les coefficients  $\bar{\mu}$  sont tous nuls, c'est-à-dire lorsque à tout cycle à deux dimensions de  $V_r$  correspond sur  $F$  un cycle algébrique;

c) à cycle-torsion nulle lorsque les coefficients  $\nu$  sont tous nuls, de sorte qu'à tout diviseur de zéro à deux dimensions de  $V$  correspond sur  $F$  un cycle nul. On emploie le terme «cycle-torsion», sans dire simplement «torsion», parce que  $V$  peut bien avoir une torsion superficielle.

Une série élémentaire est donc en même temps à circulation linéaire nulle, à circulation superficielle algébrique et à cycle-torsion nulle. Il faut remarquer que, même pour une série élémentaire, les coefficients  $\mu$  ne seront pas en général tous nuls; en effet, si la série est l'intersection des deux systèmes linéaires  $|C_1|$  et  $|C_2|$ , une courbe de  $|C_1|$  donne lieu sur  $F$  à un cycle à deux dimensions, lieu de groupes de la série, et qui n'est pas en général nul; donc, si l'on cherche une définition topologique des séries d'équivalence, il ne faut pas exiger la condition que la circulation superficielle soit complètement nulle.

Les mêmes propriétés sont évidemment vraies aussi pour la somme de deux séries élémentaires.

Pour passer à la différence  $\sigma_1 - \sigma_2$  de deux séries élémentaires, il faut dire d'avance que si une série  $\sigma$  a la propriété  $a)$  ou  $b)$  ou  $c)$ , et si  $\sigma'$  est une série contenue dans  $\sigma$ , elle aura aussi la propriété  $a)$  ou  $b)$  ou  $c)$ ; la chose est presque évidente, et vient de ce que l'image  $V'$  de  $\sigma'$  est contenue dans l'image  $V$  de  $\sigma$ . Soit donc  $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$ ; à tout groupe  $G$  de  $\sigma$  on pourra associer un groupe  $G_2$  de  $\sigma_2$  et un groupe  $G_1$  de  $\sigma_1$  de manière que  $G = G_1 - G_2$ ; lorsque  $G$  varie dans  $\sigma$ , les lieux de  $G_1$  et de  $G_2$  seront deux séries  $\sigma'_1$  et  $\sigma'_2$ , qui pourront être différentes de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ , mais qui seront certainement contenues dans  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Si la correspondance entre les groupes  $G, G_1, G_2$  est univoque, on pourra représenter  $\sigma'_1$  et  $\sigma'_2$  sur la même variété  $V_r$  qui représente déjà  $\sigma$ ; et alors un cycle  $\Delta'$  de  $V_r$  donnera lieu à trois cycles  $\Delta, \Delta_1, \Delta_2$  de  $F$ , lieux de groupes de  $\sigma, \sigma'_1, \sigma'_2$ , et l'on aura  $\Delta = \Delta_1 - \Delta_2$ . Donc, si  $\Delta'$  est linéaire,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , et donc  $\Delta$  aussi, seront nuls car  $\sigma'_1$  et  $\sigma'_2$  sont contenues dans  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ ; de même, si  $\Delta'$  a deux dimensions,  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$ , et donc  $\Delta$  aussi, seront algébriques et ne seront pas des diviseurs de zéro. Il faut procéder avec un peu plus d'attention lorsque à tout groupe  $G_1$  (ou  $G_2$ ) correspondent plusieurs groupes  $G$ ; dans ce cas  $\sigma'_1$  et  $\sigma'_2$  ne peuvent plus être représentées birationnellement sur  $V_r$ , mais seulement sur des involutions ou sur des systèmes de variétés contenues dans  $V_r$ ; mais ces involutions ou systèmes seront en tous cas des nouvelles variétés algébriques  $V'_{(1)}$  et  $V'_{(2)}$ ; de sorte qu'on passera du cycle  $\Delta'$  aux cycles  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  à travers deux cycles sur ces variétés nouvelles.

En conclusion: *Toute série d'équivalence est à circulation linéaire nulle, à circulation superficielle algébrique et à cycle-torsion nulle.*

La propriété inverse est-elle vraie? Il y a des raisons pour le supposer; les séries d'équivalence seraient alors complètement caractérisées au point de vue topologique. Mais la démonstration de la propriété inverse n'existe pas encore; l'avenir dira si les suppositions en sa faveur sont justifiées ou non.

8. — Les questions nouvelles qui se présentent ici, et dont les solutions ne sont pas encore toutes connues, sont vraiment nombreuses et importantes.

En premier lieu, les considérations topologiques que nous avons rapidement développées suggèrent tout naturellement

une question qui n'a pas d'analogie dans la théorie des courbes algébriques. Sur une telle courbe les groupes  $G$  d'une série continue sont équivalents entre eux s'il existe un nombre  $k > 1$  tel que les groupes  $kG$  soient équivalents; sur une surface les groupes  $kG$  peuvent bien appartenir à une série d'équivalence sans que les groupes  $G$  appartiennent à une série d'équivalence. Cela dépend de la circonstance que les surfaces algébriques peuvent avoir une torsion topologique. Il faut donc introduire aussi des *séries de pseudoéquivalence*, qui sont définies par la propriété qu'on vient de dire. Pour ces autres séries il est possible de donner une définition topologique complète: elles sont les seules séries dont la circulation superficielle est algébrique, et dont la circulation linéaire est *pseudonulle*; cette dernière condition se traduit sur les coefficients  $\lambda$  des formules (3), et signifie que tout cycle linéaire de  $F$  rempli par des groupes de la série est un diviseur de zéro. Les séries d'équivalence sont des cas particuliers des séries de pseudoéquivalence.

On a cherché aussi à établir quelles sont les surfaces dont les points sont deux à deux pseudoéquivalents; les surfaces en question sont les surfaces régulières dont le genre géométrique est nul. Si l'on veut, en particulier, des surfaces dont les points soient deux à deux équivalents, il faut ajouter la condition que sur la surface que l'on considère la division des courbes soit univoque; les trois conditions sont vérifiées en même temps par les surfaces rationnelles, mais l'on ne sait pas encore si elles entraînent nécessairement la rationalité de la surface.

Une autre question fondamentale est celle des séries d'équivalence *complètes*. Il y a ici une grande différence entre la théorie des courbes et celle des surfaces; en effet, si les groupes de points  $A, B, C$  d'une surface sont deux à deux équivalents, on ne peut dire que les trois séries d'équivalence complètes et irréductibles définies par  $A, B; B, C; C, A$  représentent toujours une seule et même série.

Je rappelle enfin l'application qu'on a faite de la notion des séries d'équivalence à la théorie générale des correspondances algébriques entre deux surfaces algébriques. Cette théorie, qui a été abordée par M. G. ALBANESE en partant des propriétés des systèmes continus complets de courbes existant sur une surface

algébrique, a été développée par M. SEVERI comme application de la théorie des séries d'équivalence, d'une manière qui montre lumineusement quels sont les traits essentiels de la question, et qui permet d'arriver à un principe général de correspondance pour les surfaces algébriques; le principe que M. ZEUTHEN avait donné en 1906 y rentre comme un cas particulier.

Et je voudrais vous parler encore des invariants nouveaux d'une surface algébrique qu'on peut déjà entrevoir à l'aide de la théorie des séries d'équivalence.

Mais j'ai déjà trop abusé de votre patience! J'espère que le peu que j'ai dit suffira pour vous montrer que la géométrie des variétés algébriques, loin d'être épuisée, a trouvé un terrain encore inconnu dont on ne peut pas encore prévoir toute l'importance et toutes les ressources. Et quant aux rapports entre la géométrie algébrique et la topologie, j'espère que la géométrie algébrique donnera encore une fois aux spécialistes de la topologie des exemples précieux, des idées fécondes.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. F. SEVERI. La serie canonica e la teoria delle serie principali di gruppi di punti sopra una superficie algebrica. *Comm. Math. Helv.*, 4, 1932, pp. 268-326.
2. Id. Un nuovo campo di ricerche nella geometria sopra una superficie e sopra una varietà algebrica. *Mem. Accad. d'Italia*, 3, 1932, n° 5, pp. 5-52.
3. F. ENRIQUES. Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie algebrica. *Rend. Accad. Lincei* (6), 16, 1932, pp. 533-540.
4. A. COMESSATTI. Sulla serie canonica d'una superficie algebrica. *Rend. Accad. Lincei* (6), 16, 1932, pp. 555-560.
5. L. CAMPEDELLI. Intorno ad alcune serie invarianti di gruppi di punti sopra una superficie. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 37-40.
6. F. SEVERI. Nuovi contributi alla teoria delle serie di equivalenza sulle superficie e dei sistemi di equivalenza sulle varietà algebriche. *Mem. Accad. d'Italia*, 4, 1933, n° 6, pp. 71-129.
7. Id. La teoria delle serie di equivalenza sopra una superficie algebrica: invarianza del concetto fondamentale. Nota I. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 419-425.
8. Id. La teoria delle serie di equivalenza sopra una superficie algebrica: operazioni sulle serie. Nota II. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 491-497.

9. F. SEVERI. La teoria delle serie di equivalenza sopra una superficie algebrica: i punti di vista topologico e trascendente. Nota III. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 597-600.
  10. ID. La teoria delle corrispondenze a valenza sopra una superficie algebrica: le corrispondenze a valenza in senso invariantivo. Nota I. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 681-685.
  11. ID. La teoria delle corrispondenze a valenza sopra una superficie algebrica: il principio di corrispondenza. Nota II. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 759-764.
  12. ID. La teoria delle corrispondenze a valenza sopra una superficie algebrica: il principio di corrispondenza. Nota III. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 869-876.
  13. ID. Significato funzionale del gruppo virtuale dei punti uniti nelle corrispondenze a valenza sopra una superficie. *Rend. Accad. Lincei* (6), 17, 1933, pp. 876-881.
  14. B. SEGRE. Nuovi contributi alla geometria sulle varietà algebriche. *Mem. Accad. d'Italia*, 5, 1934, n° 10, pp. 479-576.
  15. F. SEVERI. Le involuzioni razionali sopra una superficie come serie di equivalenza: proprietà preliminari. Nota I. *Rend. Accad. Lincei* (6), 19, 1934, pp. 750-754.
  16. ID. Le involuzioni razionali sopra una superficie come serie di equivalenza: i loro gruppi Jacobiani virtuali. Nota II. *Rend. Accad. Lincei* (6), 19, 1934, pp. 831-836.
  17. ID. Caratterizzazione geometrica, topologica e trascendente delle serie di equivalenza sopra una superficie. *Rend. Accad. Lincei* (6), 20, 1934, pp. 287-293.
  18. ID. Ancora sulla caratterizzazione topologica e trascendente delle serie di equivalenza sopra una superficie. *Rend. Accad. Lincei* (6), 20, 1934, pp. 395-397.
  19. ID. Un'altra proprietà fondamentale delle serie di equivalenza sopra una superficie. *Rend. Accad. Lincei* (6), 21, 1935, pp. 3-5.
-