VII. — Dernières recherches sur les groupes SIMPLES CLOS.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **28.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

VII. — Dernières recherches sur les groupes simples clos.

L'importance, dans la topologie des groupes, des groupes simples clos appelle l'attention sur les propriétés topologiques de ces groupes dont nous n'avons donné qu'une faible partie, à savoir que leurs deux premiers nombres de Betti sont nuls.

La première recherche plus approfondie sur ce sujet repose sur un théorème, susceptible du reste de s'appliquer à tout espace riemannien symétrique clos, et qui s'énonce ainsi [**15**]:

Le p^{ième} *nombre de Betti d'un groupe de Lie clos est égal au nombre des invariants intégraux linéairement indépendants de degré* p *de l'espace du groupe, et ce nombre est lui-même égal au nombre des formes extérieures de degré* p *linéairement indépendantes qui sont invariantes par le groupe adjoint.*

La démonstration de ce théorème fait appel aux théorèmes de M. de Rham [**18**].

D'après cela le premier nombre de Betti du groupe adjoint d'un groupe dont la forme $\varphi(e)$ est définie est évidemment nul. En effet ce groupe adjoint est clos et il n'admet aucun invariant linéaire, car l'existence d'un tel invariant prouverait l'existence d'un sous-groupe invariant d'ordre $r - 1$, ce qui est absurde.

On peut démontrer presque aussi facilement que le second nombre de Betti est nul; s'il ne l'était pas, le groupe adjoint laisserait invariante une forme $a_{ij}[e^i e^j]$ non identiquement nulle, les coefficients a_{ij} étant antisymétriques. L'invariance s'exprime par les relations

$$c_{ij}^r a_{rk} = c_{ik}^r a_{rj} \ ;$$

si nous désignons par $\{ijk\}$ le premier membre de cette relation, nous voyons qu'il se reproduit par l'échange des deux derniers indices et que d'autre part il change de signe par l'échange des deux premiers. On en déduit facilement qu'il est nul. Mais alors chacune des formes linéaires $a_{1i}e^i$, $a_{2i}e^i$, ..., $a_{ri}e^i$ est invariante; cela n'est possible que si elles sont toutes nulles, ce qui est absurde.

Cette démonstration du théorème relatif aux deux premiers nombres de Betti est beaucoup plus simple que celle qui a été indiquée plus haut, mais elle va moins loin. En revanche il nous est maintenant bien facile de voir que *le troisième nombre de Betti d'un groupe simple clos n'est jamais nul.* Cela tient à l'existence de la forme invariante

$$\gamma_{ijk}[e^i e^j e^k] ,$$

où l'on a posé

$$\gamma_{ijk} = c_{ij}^m A_{mk} = c_{jk}^m A_{mi} = c_{ki}^m A_{mj} ,$$

les A_{ij} étant les coefficients de la forme $\varphi(e)$. Ces coefficients γ_{ijk} se reproduisent avec ou sans changement de signe suivant qu'on effectue sur les indices une permutation impaire ou paire.

En m'appuyant sur la théorie de la représentation linéaire des groupes simples sous la forme que lui a donnée M. H. Weyl [**4**], j'ai pu démontrer [**15**] deux autres résultats remarquables:

1° *La somme des nombre de Betti d'un groupe clos de rang* l est 2^l;

2° *Le polynome de Poincaré du groupe*, c'est-à-dire le polynome $t^r + P_1 t^{r-1} + \ldots + P_{r-1} t + 1$ dont les coefficients sont les nombres de Betti successifs du groupe, *est divisible par* $(t + 1)^l$.

Ces résultats ne supposent pas le groupe semi-simple. Ils donnent immédiatement le polynone de Poincaré

$$(t^3 + 1)(t^{r-3} + 1)$$

d'un groupe simple clos de rang 2.

Les théorèmes précédents ramènent la recherche des nombres de Betti d'un groupe simple clos à un problème d'Algèbre. A ce point de vue il a été résolu récemment par M. Richard Brauer [**22**] qui a indiqué les polynomes de Poincaré pour les quatre grandes classes de groupes simples, à savoir:

(A) : $(t^3 + 1)(t^5 + 1) \ldots (t^{2l+1} + 1)$ $\quad r = l(l + 2)$;

(B) et (C) : $(t^3 + 1)(t^7 + 1) \ldots (t^{4l-1} + 1)$ $\quad r = l(2l + 1)$;

(D) : $(t^3 + 1)(t^7 + 1) \ldots (t^{4l-5} + 1)(t^{2l-1} + 1)$ $\quad r = l(2l - 1)$.

Ces résultats, dont j'avais indiqué les deux premiers comme probables, avaient été trouvés un peu auparavant par M. Pontrjagin, qui a employé une méthode de nature topologique, d'abord en utilisant le théorème relatif à la somme 2^l des nombres de Betti [**20**], ensuite en s'en affranchissant [**21**]. Cette méthode consiste essentiellement à montrer l'existence, dans un groupe simple clos G de rang l, d'un sous-groupe simple G′ d'ordre r' et de rang $l-1$ et, dans l'espace de G, d'une variété orientable fermée V à $r-r'$ dimensions ayant un seul élément commun avec G′. On obtient alors une base complète des homologies de G en prenant une base des homologies de G′ et en lui adjoignant les variétés obtenues par multiplication (au sens des groupes) des éléments de chaque variété de cette base par les éléments de V.

En supposant que cette manière de procéder puisse s'appliquer aussi aux groupes simples exceptionnels, on peut encore énoncer les résultats suivants.

Etant donné un groupe simple clos de rang l, il existe, dans l'espace du groupe, l variétés fermées orientables fondamentales $V_1, V_2, \ldots, V_l$ toutes de dimensions impaires, telles que les $2^l - 1$ variétés

$$V_{i_1} V_{i_2} \ldots V_{i_h} \qquad (i_1 < i_2 < \ldots < i_h)$$

obtenues par multiplication au sens précédemment indiqué, jointes à la variété V_0 réduite au point unité, forment une base des homologies.

Cela posé considérons deux de ces variétés,

$$W = V_{i_1} V_{i_2} \ldots V_{i_k} ,$$
$$W' = V_{j_1} V_{j_2} \ldots V_{j_h} ,$$

dont la somme des dimensions soit supérieure ou égale à r. On a les théorèmes suivants:

1° *L'intersection* W. W′ *est homologue à zéro si l'une des* 1 *variétés fondamentales n'entre dans la composition d'aucune des deux variétés* W, W′.

2° *L'intersection est homologue au produit des variétés fondamentales entrant à la fois dans la composition de* W *et de* W′,

si toutes les variétés fondamentales entrent dans la composition soit de W, *soit de* W′, *soit de* W *et* W′.

Ces théorèmes rapprochent l'espace d'un groupe simple clos simplement connexe de l'espace produit topologique de l espaces sphériques ayant les dimensions de V_1, V_2, ..., V_l: ces deux espaces ont les mêmes nombres de Betti, les mêmes groupes d'homologie et les mêmes lois d'intersections; mais on ne sait pas s'ils sont homéomorphes.

Comme vous le voyez, si les recherches toutes récentes sur la topologie des groupes simples nous ont apporté des résultats très intéressants, elles nous posent par cela même de nouveaux problèmes. Mais même en nous bornant à la simple détermination des nombres de Betti des groupes simples, on ne devra pas s'estimer complètement satisfait si on arrive à faire cette détermination pour les cinq groupes exceptionnels. C'est en quelque sorte une loi historique que les propriétés générales des groupes simples ont presque toutes été *vérifiées* d'abord sur les différents groupes et qu'on a ensuite cherché et trouvé une raison générale dispensant de l'examen des cas particuliers; je ne connais guère qu'une exception à cette loi: elle est fournie par le théorème sur la somme 2^l des nombres de Betti. Il faut espérer qu'on trouvera aussi une raison de portée générale expliquant la forme si particulière des polynomes de Poincaré des groupes simples clos.

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Lie und F. Engel. Theorie der Transformationsgruppen (B. G. Teubner, Leipzig, Berlin, 2me éd., 1930).
2. E. Cartan. Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (Thèse, 2me éd., Paris, Vuibert, 1933).
3. — Les groupes réels simples finis et continus (*Ann. Ec. Norm.*, *31*, 1914, p. 265-355).
4. H. Weyl. Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb- einfacher Gruppen durch lineare Transformationen (*Math. Zeitschr.*, *23*, 1925, p. 271-309; *24*, 1925, p. 328-395).
5. E. Cartan. Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples (*Bull. Sc. Math.*, *49*, 1925, p. 130-152).
6. — Sur certains systèmes différentiels dont les inconnues sont des formes de Pfaff (*Comptes rendus*, *182*, 1926, p. 956-958).
7. O. Schreier. Abstrakte kontinuierliche Gruppen (*Abh. math. Seminar Hamburg*, *4*, 1926, p. 15-32).