V. — Les groupes simples ouverts.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1936)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

B. Le groupe orthogonal réel à $2l + 1$ variables;

C. Le groupe linéaire complexe de la forme d'Hermite $x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_{2l}\bar{x}_{2l}$ et de la forme quadratique extérieure $[x_1 x_2] + [x_3 x_4] + \ldots + [x_{2l-1} x_{2l}]$.

D. Le groupe orthogonal réel à $2l \geqq 6$ variables;

Le groupe de Poincaré du groupe adjoint est cyclique d'ordre $l + 1$ (classe A), cyclique d'ordre 2 (classes B et C), cyclique d'ordre 4 (classe D, l impair), non cyclique d'ordre 4 (classe D, l pair). Le groupe linéaire unitaire unimodulaire est simplement connexe, mais le groupe orthogonal ne l'est pas, étant recouvert deux fois par son groupe simplement connexe de recouvrement.

M. H. Weyl a montré *a priori*, par des considérations tirées de la théorie des équations intégrales, que tout groupe clos admet une infinité de représentations linéaires *fidèles*, c'est-à-dire telles qu'à deux éléments distincts du groupe correspondent deux substitutions linéaires distinctes.

V. — Les groupes simples ouverts.

J'ai beaucoup insisté sur les groupes clos. Comme nous allons le voir, ils contiennent la clef de presque toutes les propriétés topologiques des groupes de Lie ouverts. On a en effet le théorème général suivant:

Théorème. *L'espace d'un groupe de Lie simplement connexe ouvert est le produit topologique d'un espace euclidien et éventuellement d'un ou de plusieurs espaces de groupes simples clos.*

Nous allons commencer par démontrer ce théorème pour les groupes semi-simples ouverts. Il résultera du théorème suivant:

L'espace du groupe adjoint Γ *d'un groupe simple ouvert* G *est le produit topologique de l'espace d'un groupe linéaire clos et d'un espace euclidien.*

Il suffit pour passer de ce théorème au précédent de remarquer que le groupe simplement connexe de recouvrement d'un groupe linéaire clos est le produit direct d'un ou plusieurs groupes clos simplement connexes et, éventuellement, d'un groupe abélien

simplement connexe, c'est-à-dire d'un groupe de translations, dont la variété est un espace euclidien.

Le second théorème a l'avantage de permettre la détermination du groupe fondamental de Γ, qui est confondu avec celui d'un groupe linéaire clos, en particulier de son premier nombre de Betti.

Avant de donner des indications sur la démonstration du théorème énoncé, rappelons qu'il existe deux catégories de groupes simples [**3**]: il y a d'abord les groupes simples à r paramètres complexes, c'est-à-dire d'ordre $2r$ à notre point de vue; ce sont les seuls qui soient considérés dans ma Thèse; mais il y a aussi ce que j'ai appelé des *formes réelles* de ces premiers groupes: ce sont des groupes à r paramètres réels tels que le groupe simple à r paramètres complexes s'en déduise par le passage, en ce qui concerne les paramètres, du réel au complexe: cette phrase a un sens à cause de l'analyticité des fonctions qui définissent la loi de composition d'un groupe de Lie. J'ai déterminé toutes ces formes réelles en 1913. A cet égard on arrive à une constatation tout à fait remarquable, c'est qu'on peut déduire, par le passage du réel au complexe, tout groupe simple à paramètres complexes d'un groupe simple clos. M. H. Weyl a donné depuis [**4**] une démonstration de ce fait qui s'applique simultanément à tous les types de groupes simples à paramètres complexes.

Considérons d'abord un groupe simple G à r paramètres complexes; la forme $\varphi(e)$, considérée dans le domaine réel, est réductible à une somme de r carrés positifs et de r carrés négatifs. Toute forme réelle close de G est un sous-groupe de G auquel est attachée une *automorphie involutive* de G, celle qui fait passer d'un paramètre complexe de G au paramètre conjugué. L'espace de toutes ces automorphies involutives est un espace riemannien symétrique homéomorphe à l'espace euclidien; son groupe des déplacements est le groupe adjoint Γ de G. Par deux points il passe une géodésique et une seule; le produit des deux automorphies involutives associées à ces deux points est un déplacement (transvection) qui fait glisser cette géodésique sur elle-même. Cela posé tout déplacement est, d'une manière et d'une seule, le produit d'une rotation autour d'un point origine donné O, c'est-à-dire d'une transformation du groupe adjoint d'une des

formes réelles closes de G, par une transvection, celle qui amène O dans le point transformé de O par le déplacement considéré. Il résulte de là que *l'espace de* Γ *est le produit topologique de l'espace du groupe adjoint de la forme réelle close par l'espace euclidien à* r *dimensions. Le groupe adjoint* Γ *a donc le même groupe fondamental que le groupe adjoint de la forme réelle close correspondante.* Il résulte, en particulier, de là que *tout groupe simple à paramètres complexes admet des représentations linéaires fidèles.*

Passons maintenant à une forme réelle ouverte d'un groupe simple G à paramètres complexes. Là encore la théorie des espaces riemanniens symétriques, dont j'ai parlé dans ma conférence du Congrès de Zurich [**19**], éclaire les choses [**12**]. Dans l'espace $\mathcal{E}_G$ à r dimensions, que nous avons associé au groupe G, l'automorphie involutive de G qui provient du passage des paramètres de g d'une valeur complexe à la valeur conjuguée, définit une symétrie qui laisse fixes tous les points d'une certaine variété totalement géodésique $\mathcal{E}_g$. Cette variété $\mathcal{E}_g$, homéomorphe à l'espace euclidien, joue par rapport au groupe g le même rôle que l'espace $\mathcal{E}_G$ par rapport au groupe G; son groupe de déplacements est le groupe adjoint de g et chacune de ses transformations est d'une manière et d'une seule le produit d'une rotation autour d'un point fixe O de $\mathcal{E}_g$ par la transvection qui amène O dans le point transformé de O par le déplacement donné. Chaque rotation autour de O est d'autre part complètement caractérisée par le groupe linéaire qui transforme les vecteurs d'origine O. Il en résulte immédiatement le théorème à démontrer.

Ajoutons que si le groupe g est simple, le groupe linéaire clos des rotations est semi-simple ou est infinitésimalement le produit direct d'un groupe semi-simple et d'un groupe abélien *d'ordre* 1. Il en résulte le

THÉORÈME. *Le premier nombre de Betti de l'espace d'un groupe simple ouvert est égal à* 0 *ou à* 1.

Les groupes simples ouverts dont le groupe adjoint a son premier nombre de Betti égal à 1 jouent un rôle important dans certains problèmes de la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes; ils interviennent [**23**] comme

groupes de transformations pseudo-conformes laissant invariant un domaine borné symétrique: cela veut dire un domaine admettant en lui-même une transformation pseudo-conforme involutive dont un point arbitrairement donné du domaine est un point invariant isolé.

Comme exemples de groupes simples ouverts dont le premier nombre de Betti est égal à 1, citons le groupe homographique réel d'une variable, le groupe linéaire complexe d'une forme d'Hermite indéfinie, le groupe linéaire réel d'une forme quadratique réelle réductible à $p \geqq 2$ carrés positifs et 2 carrés négatifs. Comme exemple de groupes simples ouverts dont le premier nombre de Betti est nul, citons le groupe linéaire réel d'une forme quadratique réductible à $p \geqq 3$ carrés positifs et $q \geqq 3$ carrés négatifs. Si l'un des entiers p et q est impair, le groupe fondamental du groupe adjoint est d'ordre 4; si p et q sont pairs tous deux, il est d'ordre 8. Enfin le groupe des déplacements de l'espace hyperbolique réel à $n \geqq 3$ dimensions admet un groupe fondamental d'ordre 2.

Ajoutons la remarque qu'*un groupe simple ouvert n'admet pas toujours de représentation linéaire fidèle;* il en est certainement ainsi si le premier nombre de Betti de son groupe adjoint est égal à 1, le premier nombre de Betti du groupe lui-même étant nul; exemple: le groupe simplement connexe de recouvrement du groupe homographique réel à une variable.

Si l'on passe maintenant d'un groupe simple ouvert à un groupe semi-simple ouvert, on voit que son premier nombre de Betti h_1 est au plus égal au nombre des groupes simples dont il est infinitésimalement le produit direct; quant au second nombre de Betti, on démontre facilement qu'il est égal à $\frac{h_1(h_1-1)}{2}$.

VI. — Les groupes de Lie simplement connexes et le troisième théorème fondamental de Lie.

Il nous reste maintenant à démontrer, pour les groupes de Lie simplement connexes les plus généraux, le théorème suivant, dont je rappelle l'énoncé.